Российская академия наук
Институт Программных Систем

Исследовательский Центр Системного Анализа

Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах (термодинамика и экономика)

Основная тематика ИЦ связана с исследованием оптимальных процессов и предельных возможностей макросистем с приложениями к необратимой термодинамике и экономике. Макросистемы (МС) – системы, состоящие из большого числа индивидуально неуправляемых элементов (молекул в термодинамике, элементарных экономических агентов в экономике, индивидуумов в процессах миграции и пр.). Управление в таких системах возможно только на макроуровне, изменением воздействий, влияющих на все множество микроэлементов.

Основные задачи

1. Количественная мера необратимости в микроэкономике.
2. Процессы минимальной диссипации .
3. Стационарное состояние ОС, включающей посредника.
4. Предельные возможности посредника в замкнутых, открытых и нестационарных МС.
5. Область реализуемых состояний МС.

Одной из характеристик макросистем является количественная мера необратимости процессов, изменение которой характеризует тот объем ресурса, который потребуется привлечь для возврата макросистем в исходное состояние после необратимого процесса. В термодинамике мерой необратимости является энтропия, в экономике - функция благосостояния. Для любого процесса в макросистеме мера необратимости не убывает, скорость ее роста называют *диссипацией*.

Процессы минимальной диссипации

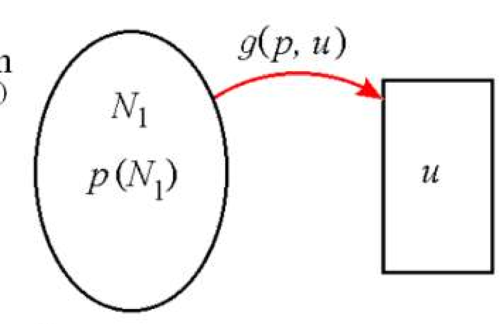
Термодинамика

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(p,u)X(p,u)dt \to \min_{u(t)}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(p,u)dt = \overline{g}$$

$$\dot{N}_1 = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = \varphi(p,u),$$

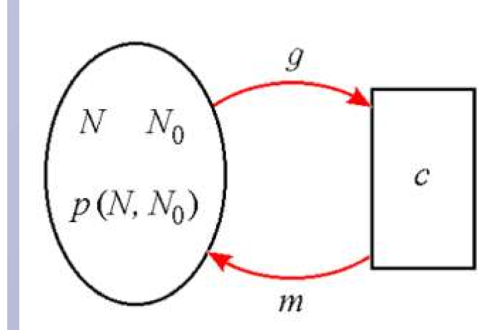
$$p(0) = p_0, \quad \varphi \neq 0\,(p \neq u)$$



Для случая $\varphi = \alpha(p)g(p,u)$ получим:

$$\boxed{\frac{g^2}{\partial g/\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = \mathrm{const}}$$

Микроэкономика



$$N_0(\tau) \to \min_{c(t)}$$

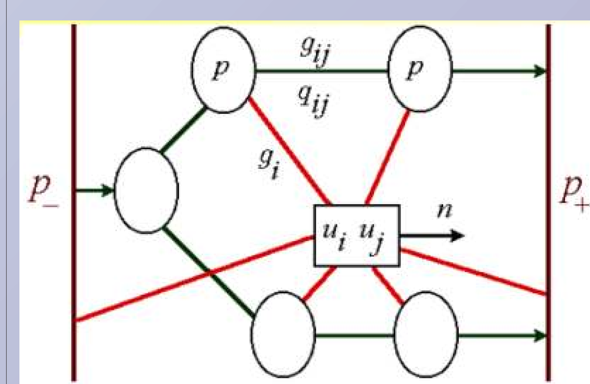
$$\frac{dN_0}{dt} = cg(c,p), \quad N_0(0) = N_0^0,$$

$$\frac{dN}{dt} = -g(c,p), \quad N(0) = N^0,$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(c,p)dt = \overline{g}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dN}\left[\frac{\partial g/\partial c}{g^2}\right] = \frac{(\partial g/\partial p)(\partial p/\partial N_0)}{g^2}}$$

Стационарное состояние ОС, включающей посредника



Термодинамика

n – мощность, $p_{1i} \sim T_i$

q – тепло,

g – вещество,

p – интенсивные переменные

$$n = \sum_i [q_i(p_i,u_i) + g_i(p_i,u_i)] \to \max_u$$

при $\sum_j q_{ij}(p_i,p_j) = q_i, \quad \sum_j g_{ij}(p_i,p_j) = g_i,$

$$\sum_i g_i = 0,$$

$$\sum_j\left[g_{ij}s_{ij} + \frac{q_{ij}}{p_{1j}}\right] = 0, \quad i = 1,\ldots,m \quad \sum_i\left[g_i s_i + \frac{q_i}{u_{1i}}\right] = 0.$$

Если $g = 0$, $q_{ij} = \alpha_{ij}(T_i - T_j)$, то

$$\sum_i \alpha_i \frac{T_i}{u_i} = \sum_i \alpha_i; \quad u_i^2 = \Lambda\frac{T_i}{1-\lambda_i}$$

$$\alpha_i\left(1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i\right) = \lambda_i \sum_j \alpha_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m$$

Если $m = 2$, $T_1 = T_+$, $T_2 = T_-$, то

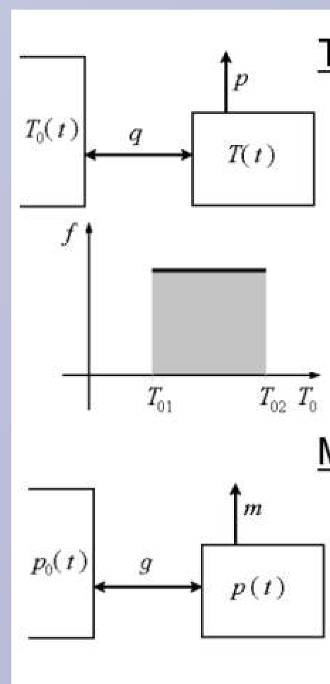
$$u_1^* = k\sqrt{T_+}, \quad u_2^* = k\sqrt{T_-}, \quad \eta = 1 - \sqrt{\frac{T_-}{T_+}},$$

$$N_{\max} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-}\right)^2$$ – предельная мощность ТМ

Экстремальный принцип Пригожина при $g = AX$ (A – матрица Онзагера) справедлив для любого u.

Нестационарные резервуары

Для нестационарного случая извлечение работы в термодинамике и прибыли в микроэкономике возможно при взаимодействии не с несколькими, а только с одной подсистемой.



Термодинамика $\quad \overline{p} = \overline{q(T_0(t),T)} \to \max_{T(t)}$

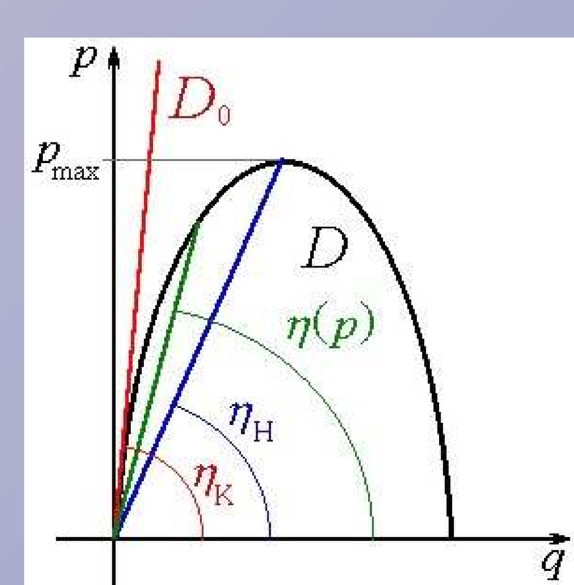
$$\boxed{\frac{1}{T^2}\frac{q}{\partial q/\partial T} - \frac{1}{T} = \mathrm{const}}$$

$$\overline{p}_{\max} = \alpha\left[\frac{T_{01}+T_{02}}{2} - \frac{4}{9}\left(\frac{T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2}}{T_{02}-T_{01}}\right)^2\right]$$

Микроэкономика $\quad \overline{m} = \overline{pg(p_0,p)} \to \max_{p(t)}$

$$\boxed{\frac{g}{\partial g/\partial p} + p = \frac{\int_0^\tau \frac{\partial q}{\partial p}p\,dt}{\int_0^\tau \frac{\partial q}{\partial p}dt}}$$

Область реализуемости



$$\eta_K = 1 - \frac{T_-}{T_+}$$

$$\eta_H = 1 - \sqrt{\frac{T_-}{T_+}}$$

$$\sigma = 0\,(\tau \to \infty, p \to 0) \sim D_0 \qquad D \subset D_0$$

$$\sigma(p) > 0\,(\tau, p > 0) \sim D$$

$$\eta(p) = \frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\overline{\alpha}T_+} + \eta_K\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{p}{\overline{\alpha}T_+} + \eta_K\right)^2 - \frac{p}{\overline{\alpha}T_+}}$$

Кроме прямых ограничений на состояние МС, наложенных в конкретной задаче, для этих систем характерны ограничения, возникающие из-за того, что в замкнутых системах показатель необратимости может только возрастать, а в открытых системах диссипация (энергии, капитала) неотрицательна.

Общая методология построения области реализуемости для замкнутых МС, включающих активные подсистемы, такова:

1. Записывают уравнения балансов, включая в их число балансовое соотношение по фактору необратимости S.
2. При ограничениях, наложенных на продолжительность процесса, находят минимальное значение $\sigma = \sigma_{\min}$, при котором может быть достигнуто то или иное состояние. Этому значению соответствует процесс минимальной диссипации.
3. Уравнения балансов при условии $\sigma > \sigma_{\min}$ определяют область реализуемости D.

Направления исследований ИЦ Системного анализа

- Методы оптимального управления для задач с ограничениями различного типа;
- Усредненные задачи оптимального управления (задачи, включающие усредненные значения переменных или функций переменных);
- Предельные возможности процессов в макросистемах при конечной интенсивности или продолжительности процесса;
- Дифференциальные инварианты и задачи эквивалентности дифференциальных уравнений.
- Задачи описания линейных функционалов на пространстве $H(D)$ функций, аналитических в области C^n.

CA

НАШ АДРЕС

Исследовательский центр
Системного Анализа
Институт Программных Систем
Российской Академии Наук

152020, Россия, Ярославская обл.
Переславль-Залесский
Тел./Факс: +7 (08535) 98057
E-mail: tsirlin@sarc.botik.ru
Web-site: Http://www.botik.ru/PSI/SARC/