УДК 536.7

А. М. Цирлин

Предельные возможности макросистем

Аннотация. Дан обзор результатов работ по исследованию предельных возможностей макросистем в термодинамике и микроэкономике, проведенных в 1989–2004 гг. в Научно-исследовательском центре системного анализа ИПС РАН.

1. Математические модели и предельные возможности макросистем

Макросистемами называют системы, состоящие из большого числа элементов, каждым из которых нельзя управлять. Управление такими системами осуществляется только на макроуровне. Примеры: термодинамические системы, микроэкономика, миграция населения, сегрегированные системы и др. В случае сегрегированных систем мы имеем дело с большим числом ячеек (агрегатов) [31], взаимодействующих друг с другом через общую среду. Управлять при этом можно только параметрами среды.

Модели макросистем, количественная мера необратимости, типовые задачи и методы их решения. При феноменологическом подходе к макросистемам их состояние характеризуют двумя типами переменных: *экстенсивными* и *интенсивными*. Первые при обьединении двух одинаковых систем удваиваются, а вторые остаются неизменными. Примеры экстенсивных переменных: обьем, внутренняя энергия, количество вещества в термодинамике, запасы ресурсов и капитала в экономике; примеры интенсивных переменных: температура, давление, химические потенциалы в термодинамике, оценки ресурсов в экономике. Макросистема равновесна, если для любой ее части, включающей достаточно много микроэлементов, интенсивные переменные одинаковы. Для такой системы переменные связаны друг с другом уравнением состояния.

Равновесные макросистемы можно разбить на три типа:

Системы бесконечной емкости, у которых интенсивные переменные постоянны или изменяются во времени независимо от значений экстенсивных переменных (термодинамические резервуары, рынки совершенной конкуренции).

Системы конечной емкости, у которых интенсивные переменные зависят от экстенсивных (термодинамическая система ограниченного обьема, экономическая система с ограниченными запасами ресурсов).

Активные системы, у которых значениями интенсивных переменных можно управлять независимо от экстенсивных (рабочее тело тепловой машины, посредническая или производственная фирма, диллер на финансовых рынках). Именно интенсивные переменные активных систем являютя управляющими воздействиями в задачах оптимизации макросистем.

Макросистема *замкнутая*, если она изолирована от окружающей среды, и *открытая* в противном случае. Система может быть изолирована не по всем, а лишь по части переменных.

Важной особенностью макросистем является то обстоятельство, что при их взаимодействии возникают процессы обмена, приводящие к возникновению потоков, которые изменяют экстенсивные переменные систем так, что в системах конечной емкости интенсивные переменные выравниваются. Эти «естественные» процессы протекают без какого-либо воздействия окружающей среды. Для возврата контактировавших систем в исходное состояние требуется привлечение из окружения некоторого ресурса. Такие процессы называют *необратимыми*.

Одной из характеристик макросистем является количественная мера необратимости процессов, изменение которой характеризует тот обьем ресурса, который потребуется привлечь для возврата макросистем в исходное состояние после необратимого процесса. В термодинамике мерой необратимости является энтропия, в экономике — функция благосостояния, на которой мы ниже остановимся подробнее. И ту и другую далее будем обозначать через S. Для любого процесса в макросистеме мера необратимости не убывает, если же она возрастает, то скорость ее роста называют *диссипацией*.

При исследовании необратимых процессов в макросистемах их разбивают на отдельные равновесные подсистемы, так что изменение показателя необратимости связано с процессами обмена между этими подсистемами. Такое допущение (замена системы с распределенными параметрами совокупностью систем с сосредоточенными параметрами) позволяет использовать уравнения состояния и переменные, имеющие смысл только в равновесии. Подобный подход принят в термодинамике при конечном времени [39].

На описательном уровне охарактеризуем типовые задачи оптимизации необратимых термодинамических и микроэкономических систем и общую методологию их решения, а затем дадим их количественные формулировки и результаты решения. Вот эти задачи:

(1) Ввести количественную меру необратимости для экономических макросистем, с учетом их особенностей.
(2) Найти условия, которым удовлетворяют процессы, имеющие при тех или иных ограничениях минимальную необратимость — процессы минимальной диссипации.
(3) Найти распределение значений экстенсивных переменных в стационарном режиме открытой макросистемы, включающей активную подсистему.
(4) Найти оптимальную стратегию активной системы в замкнутой и открытой макросистеме.
(5) Построить область реализуемых состояний макросистемы.

Последние три класса задач тесно связаны с двумя первыми, так как оказывается, что макросистема достигает своих предельных показателей, когда протекающие в ней процессы являются процессами минимальной диссипации.

Количественная мера необратимости для микроэкономических систем. Обозначим через $N \in R^{n+1}$ вектор ресурсов ЭА, одной из составляющих которого N_0 является базисный ресурс — капитал. Через p_i обозначим оценку i-го ресурса — ту минимальную цену, по которой ЭА готов продать, и максимальную, по которой он готов купить i-ый ресурс. При продаже (покупке) ресурса по цене p_i его поток сколь угодно мал, поэтому p_i называют еще равновесной ценой.

Справедливо утверждение : *Существует функция $S(N)$ такая, что ее дифференциал*

$$dS = p_0(N)\left[dN_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i(N)dN_i\right]. \tag{1}$$

Эту функцию называют *функцией благосостояния.* Ее существование для $n = 1$ доказано с использованием функций предпочтения Холюстом и Урбановичем, Розоноэром без использования этих функций в приложении к [3], а для случая $n > 1$ в [23].

Из существования функции благосостояния, в предположении, что она дважды непрерывно дифференцируема, вытекают равенства

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial N_0} > 0, \quad \overline{p_i} = p_0 p_i = \frac{\partial S}{\partial N_i}, \quad p_i = \frac{\frac{\partial S}{\partial N_i}}{\frac{\partial S}{\partial N_0}},$$
$$\frac{\partial \overline{p_i}}{\partial N_j} = \frac{\partial \overline{p_j}}{\partial N_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial N_i \partial N_j}. \tag{2}$$

При любых процессах обмена в микроэкономике суммарная функция благосостояния не убывает. Кроме того, в отличие от термодинамики, где не убывает только суммарная энтропия системы, в экономике не убывает и функция благосостояния каждого ЭА. Последнее утверждение называют *принципом добровольности.*

Из принципа добровольности вытекает, что два ЭА могут передавать от одного к другому только один i-ый вид ресурса, только в том случае, когда его оценки p_{1i} и p_{2i} имеют разный знак. В противном случае для того, чтобы одновременно выполнялись неравенства $dS_1 \geq 0$ и $dS_2 \geq 0$ для оценок отличных от нуля, должен происходить обмен не менее, чем между двумя потоками.

Поток обмена между ЭА g равен нулю в равновесии, когда вектора оценок равны друг другу ($p_1 = p_2$). Если активная подсистема осуществляет обмен с ЭА так, что состояние ЭА в пространстве N меняется циклически, то

$$\Phi dS \geq 0. \tag{3}$$

Равенство в (3) соответствует обмену по равновесным ценам, его продолжительность $\tau \to \infty$. Функция благосостояния экономического резервуара

$$S_m = p_0 \left(N_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i N_i \right), \tag{4}$$

где p_0 и p_i — константы или функция времени (нестационарный рынок). Для активной подсистемы (посредника)

$$S_a = p_0(N_0) N_0, \tag{5}$$

ее цель извлечение капитала.

Пусть посредник производит обмен с ЭА за конечное время τ и так, что состояние ЭА совершает цикл. Поток ресурса N (для простоты скалярного) имеет тот же знак, что и разница между ценой C и оценкой ресурса p

$$\mathrm{Sign} g(C, p) = \mathrm{Sign}(C - p).$$

Прирост капитализации ЭА $N_0 + p(N)N$

$$\Delta(S_{\overline{p_0}}) = p_o \int_0^\tau g(C,p)(C-p)dt > 0. \tag{6}$$

Для посредника затраты капитала

$$\Delta N_{0a} = -\int_0^\tau g(C,p)Cdt.$$

Если бы посредник закупил то же количество ресурса по обратимым ценам, то его затраты были бы меньше

$$\Delta N_{0a}^0 = -\int_0^\tau g(C,p)pdt.$$

Потери капитала (торговые издержки) равны

$$\Delta N_{0a}^0 - \Delta N_{0a} = \int_0^\tau g(C,p)(C-p)dt = \Delta(S_{p_0}).$$

Величину потерь в текущий момент времени

$$\sigma = g(C,p)(C-p) \tag{7}$$

называют *диссипацией капитала.*

2. Процессы минимальной диссипации

2.1. Термодинамика. Рассмотрим процесс обмена подсистемы конечной емкости и активной подсистемы продолжительностью τ. Поток $g \in R^1$ зависит только от интенсивных переменных $U_1(N)$ и $U_2(t)$. При этом U_1 зависит от экстенсивной переменной N_1, а U_2 является управлением. Производство энтропии представляет собой произведение потока $g(U_1U_2)$ на движущую силу $x(U_1,U_2)$. Скорость изменения экстенсивной переменной N зависит от потока, а в силу уравнения состояния изменяется и U_1, причем скорость изменения зависит от U_1 и U_2. Пусть, кроме того, средняя интенсивность потока задана. Задача о минимальной диссипации примет вид

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(U_1,U_2)x(U_1,U_2)dt \to \min_{U_2} \tag{8}$$

при условиях

$$\dot{U}_1 = \varphi(U_1, U_2), \quad U_1(0) = U_{10}, \quad \varphi \neq 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau g(U_1, U_2)dt = \overline{g}. \tag{10}$$

Условия оптимальности этой задачи получены в [34, 35], для важного случая, когда

$$\varphi(U_1, U_2) = \alpha(U_1)g(U_1, U_2)$$

они имеют вид

$$\frac{g^2}{\frac{\partial g}{\partial U_2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial U_2} = \mathrm{Const}. \tag{11}$$

Для теплопереноса, когда поток тепла q ньютоновский,

$$T_1 \sim U_1, \quad T_2 \sim U_2, \quad g \sim q = \alpha(T_1 - T_2),$$

$$\varphi(T_1, T_2) = \frac{q}{C(T_1)}, \quad x = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right),$$

где C — теплоемкость, из условий (11) вытекает, что в любой момент времени отношение температур $\frac{T_1}{T_2}$ должно быть постоянно. Для лучистого теплообмена, когда тепловой поток пропорционален разности четвертых степеней температур, в каждый момент времени должно быть постоянно выражение

$$\frac{T_2^4 - T_1^4}{T_2^{5/2}} = \mathrm{Const}. \tag{12}$$

Решение задачи (8)–(10) для векторного случая требует использования принципа максимума. Оно существенно упрощается, когда потоки линейно связаны с движущими силами (соотношения Онзагера) и приводят к тому, что в любой момент времени вектор движущих сил (значит, и вектор потоков) должны быть постоянны.

Представляет интерес и обратная задача: выделить класс кинетических соотношений, для которых условия минимальной диссипации приводят к некоторому требованию. Например, к требованию постоянства скорости роста энтропии системы. Такая задача решена в [7, 46].

2.2. Микроэкономика. Так как диссипация капитала представляет собой интенсивность потерь посредника при покупке ресурса (переплата) или при его продаже (скидка) по сравнению с равновесными ценами, то минимуму диссипации соответствует минимум капитала ЭА в конце процесса покупки (продажи) ресурса, если количество ΔN ресурса и продолжительность процесса заданы. Для скалярного ресурса приходим к задаче

$$N_0(\tau) \to \min_{C(t)} \tag{13}$$

при условиях

$$\frac{dN_0}{dt} = Cg(p, C), \quad N_0(0) = N_0^0, \tag{14}$$

$$\frac{dN}{dt} = -g(p, C), \quad N(0) = N^0, \tag{15}$$

$$\int_0^\tau g(p, C)dt = \Delta N. \tag{16}$$

Здесь $C(t)$ — цена посредника, $p = p(N_0, N)$ — равновесная цена ЭА.

Условия оптимальности этой задачи (условия минимальной диссипации) получены в [29, 48]:

$$\frac{d}{dN}\left[\frac{\frac{\partial g}{\partial C}}{g^2}\right] = \frac{\frac{\partial g}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial N_0}\right)}{g^2}. \tag{17}$$

Они вместе с условием (16) определяют $C^*(N_0, N)$. Если $\frac{\partial p}{\partial N_0} = 0$, то эти условия приводят к равенству

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial C}}{g^2} = \text{Const}. \tag{18}$$

В частности, если функция предложения линейна $g = \alpha(C - p(N))$, то из (18) следует, что $g(C^*, p) = \text{Const}\ \forall\ t$.

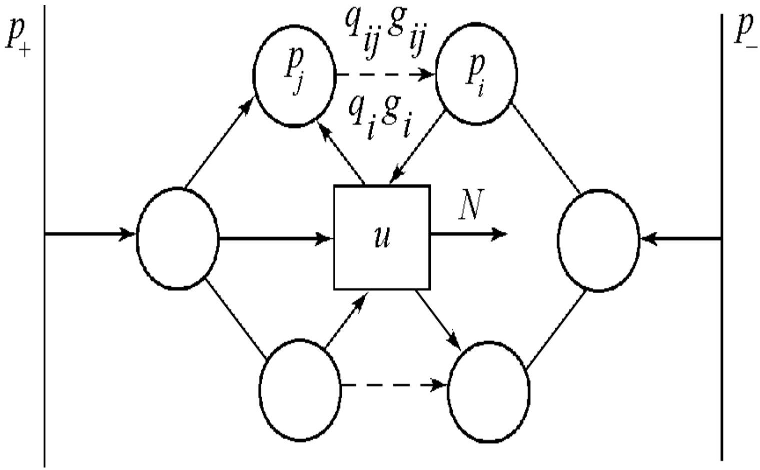

Рис. 1. Открытая термодинамическая система с преобразователем.

3. Стационарное состояние открытых МС и предельные возможности посредника

3.1. Термодинамика. Будем рассматривать открытую систему (Рис. 1), состоящую из m внутренне равновесных подсистем, двух резервуаров и активной подсистемы. Между всеми подсистемами возникают потоки, зависящие от различия их интенсивных переменных, так что в целом система неравновесна.

В стационарном режиме потоки отличны от нуля, если число резервуаров больше двух и их интенсивные переменные p_+, p_- различны. Для простоты рассмотрим систему с двумя резервуарами. Активная система может контактировать как с резервуарами, так и с любой из подсистем, устанавливая в точках контакта значения интенсивных переменных $U_+, U_-, U_i (i = 1, \ldots, m-2)$. Причем в первой составляющей каждого из этих векторов p и U будем считать температуру, так что

$$T_i = p_{1i}, \quad T_{ai} = U_{1i}.$$

Требуется выбрать такие значения переменных U, чтобы извлекаемый ею поток «организованной» энергии N (работы, работы разделения, электрической энергии) был максимален. Требуется найти U^* и значения векторов $p_i (i = 1, \ldots, m-2)$ для подсистем в стационарном режиме. Энергетические потоки обозначим через q, а материальные через g.

Постановка задачи примет вид

$$N = \sum_{i=1}^{m} q_i(p_i, U_i) \to \max_{U,p} \tag{19}$$

при выполнении балансовых соотношений по энергии, веществу и энтропии для каждой из $(m-2)$-х подсистем и преобразователя

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{j=1}^{m} q_{ij}(p_i, p_j) = q_i(p_i, U_i) \quad i = 1, \dots, m-2, \\
\sum\limits_{j=1}^{m} g_{ij}(p_i, p_j) = g_i(p_i, U_i) \quad i = 1, \dots, m-2, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} \left[g_{ij}(p_i, p_j) s_{ij} + \frac{q_{ij}(p_i, p_j)}{p_{1i}} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, m-2, \\
\sum\limits_{i=1}^{m} g_i(p_i, U_i) = 0, \\
\sum\limits_{i=1}^{m} \left[g_i(p_i, U_i) s_i + \frac{q_i(p_i, U_i)}{U_{1i}} \right] = 0.
\end{array}\right\} \tag{20}$$

Здесь s_{ij} и s_i — мольные энтропии потоков g_{ij} и g_i соответственно, они, вообще говоря, зависят от U и p.

Сформулированная задача нелинейного программирования определяет предельную мощность преобразователя и распределение вещества и энергии в открытой системе. Наличие в ней химических реакторов добавит в условия материального и энтропийного балансов соответствующие слагаемые [23].

Для частного случая задачи (19), (20), где осуществляется только обмен теплом, причем тепловые потоки — ньютоновские с коэффициентами α_{ij} и α_i, соответственно, в [27] получены условия оптимальности в форме

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{T_i}{U_i} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \tag{21}$$

$$U_i^2 = \Lambda \frac{T_i}{1-\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{22}$$

$$\alpha_i\left(1+\frac{\Lambda}{U_i}-\lambda_i\right)=\lambda_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij},\quad i=1,\ldots,m. \tag{23}$$

В частности, когда $m=2,\ T_1=T_+,\ T_2=T_-$

$$U_1^*=k\sqrt{T_+},\quad U_2^*=k\sqrt{T_-}.$$

КПД машины равен

$$\eta=1-\sqrt{\frac{T_-}{T_+}},\quad N_{\max}=\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\sqrt{T_+}-\sqrt{T_-}\right)^2.$$

Для векторных потоков g, линейно зависящих от движущих сил x, справедливы условия взаимности Онзагера, и для любого вектора U интенсивных переменных активной подсистемы значения экстенсивных переменных распределены таким образом, что суммарное производство энтропии минимально

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}x_{ij}^T A_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}x_i^T A_i x_i\to\min_p.$$

Здесь $x_i(p_i,U_i)$ — вектор движущих сил от i-ой подсистемы к преобразователю, $x_{ij}(p_i,p_j)$ — то же, от i-ой подсистемы к j-ой (экстремальный принцип Пригожина для системы с преобразователем).

3.2. Микроэкономика. Для потоков ресурсов, линейно зависящих от разности, между ценами C и оценками p для ЭА, имеющего функцию благосостояния $S(N)$, справедливы условия взаимности [32].

Пусть поток i-го ресурса

$$g_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\Delta_j=A\Delta,\quad \Delta_j=C_j-p_j,\quad i=1,\ldots,k. \tag{24}$$

Диссипация капитала

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k}g_i\Delta_i=\frac{d}{dt}\left[\frac{S}{p_0}\right]=g^TBg,\quad B=A^{-1}. \tag{25}$$

Элементы b_{ij} матрицы B определяются второй производной

$$\frac{\partial^2}{\partial N_i\partial N_j}\left[\frac{S}{p_0}\right],$$

которая не зависит от порядка дифференцирования, т. е. $b_{ij} = b_{ji}$. Значит, симметрической является и матрица A

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j. \tag{26}$$

Структура открытой МЭ системы с посредником совпадает со структурой Рис. 1. Обозначим через U_i цены покупок (продаж) ресурса посредником i-му ЭА, через n — интенсивность потока капитала, извлекаемого из системы, через $g_i(p_i, U_i)$ — поток ресурса между посредником и ЭА, зависящий от его оценки p_i и закупочной цены, $g_{ij}(p_i, p_j)$ — поток обмена ресурсом между ЭА-ми. Постановка задачи примет вид

$$n = -\sum_{i=1}^{m} g_i(p_i, U_i) U_i \to \max_{U,p} \tag{27}$$

при выполнении балансов по ресурсу для каждого ЭА кроме резервуаров.

$$\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(p_i, p_j) = g_i(p_i U_i), \quad i = 1, \ldots, m-2, \tag{28}$$

и при условии ненакопления ресурса посредником

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(p_i, U_i) = 0. \tag{29}$$

Знак минус в (27) объясняется тем, что за положительное направление потока g принято направление от ЭА к посреднику, что сопровождается затратами капитала.

Условия оптимальности задачи (27)–(29) для $g_{ij} = \alpha_{ij}(p_j - p_i)$, $g_i = \alpha_i(U_i - p_i)$ имеют вид [48]

$$U_i = 0.5(p_i + \lambda_i + \Lambda) \quad i = 1, \ldots, m, \tag{30}$$

$$\Lambda - U_i + \lambda_i = -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji}, \quad i = 1, \ldots, m-2. \tag{31}$$

Эти уравнения вместе с условиями (28), (29) определяют оптимальное решение.

Когда $m = 2,\ p_1 = p_+,\ p_2 = p_-$

$$U_1^* = \frac{2\alpha_1 p_- + \alpha_2(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$U_2^* = \frac{2\alpha_2 p_+ + \alpha_1(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$n_{\max} = \frac{\alpha_1\alpha_2(p_+ - p_-)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Для МЭ системы с линейной зависимостью потоков от разности оценок справедлив аналог экстремального принципа Пригожина, который приведен выше, с той разницей, что минимума достигает диссипация капитала [6]:

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \Delta_{ij}^T A_{ij}\Delta_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i^T A_i \Delta_i \to \min_p, \tag{32}$$

$$\Delta_{ij} = p_i - p_j, \quad \Delta_i = C_i - p_i.$$

4. Оптимальные процессы в МС

Характерными для МС задачами оптимального управления являются задачи о переводе системы из одного состояния в другое с минимальной затратой или максимальным извлечением «организованного» ресурса. В термодинамике это — механическая или электрическая энергия, работа разделения; в микроэкономике — капитал. Приведем результаты решения некоторых задач.

4.1. Термодинамика. *Работоспособность — максимальная работа, которую можно извлечь из неравновесной системы за заданное время τ.* Каждая подсистема характеризуется начальным состоянием. На множество конечных состояний наложены те или иные ограничения. Преобразователь может вступать в контакт с каждой подсистемой, меняя свои интенсивные переменные $U(t)$ так, чтобы извлечь максимальную работу. Управлениями являются кроме этих переменных функции контакта, равные единице при наличии контакта и нулю при его отсутствии, а также конечное состояние системы с учетом ограничений.

Справедливы следующие утверждения [24]:

1. В оптимальном процессе для каждого контакта преобразователя с подсистемами конечной емкости $U^*(t)$ должны удовлетворять условиям минимальной диссипации.

2. В системе, состоящей из резервуаров, для любых законов тепло–и массопереноса вектор-функция, состоящая из функций $U^*(t)$ и функций контакта, кусочно-постоянна, причем число ее значений не превосходит $k+1$, где k — число условий, наложенных на состояние системы в момент τ.

Энтропия системы растет как кусочно-линейная функция.

Следствие: При $k = 0$ энтропия в оптимальном процессе растет с постоянной скоростью, а преобразователь контактирует только с одним резервуаром.

Результаты: *Система из n термических подсистем конечной емкости $C_i (i = 1, \dots, n)$ и резервуара с температурой T_-;*

$$q_i = \alpha_i(U_i - T_i), \quad \dot{T}_i = -\frac{q_i}{C_i}, \quad T_i(0) = T_{i0}$$

$$A_\infty = \sum_{i=1}^{n} C_i \left[T_{i0} - T_- \left(1 + \ln \frac{T_{i0}}{T_-} \right) \right], \tag{33}$$

$$A^*_\tau = Q_+(k) - Q_-(k), \tag{34}$$

$$\begin{gathered} Q_+(k) = \sum_{i=1}^{n} T_{0i} C_i \left[1 - \exp\left(-\tfrac{\tau \alpha_i (1-k_i)}{C_i} \right) \right], \\ Q_-(k) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\tau T_- \alpha_i \alpha_- (1-k_i)}{\alpha_- k_i - \alpha_i (1-k_i)}, \end{gathered} \tag{35}$$

$$T_{0i} \exp\left(-\frac{\alpha_i \tau}{C_i}(1-k_i) \right) = \frac{T_- \alpha_-^2}{(\alpha_- k_i - \alpha_i(1-k_i))^2}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{36}$$

Аналогичные решения получены для системы, не включающей резервуара [6].

Системы разделения (минимальная работа при ограниченном времени τ). N_0 — количество молей смеси, γ_j — доля в j-ой емкости после разделения, x_{ij} — концентрация i-го компонента в j-ой емкости,

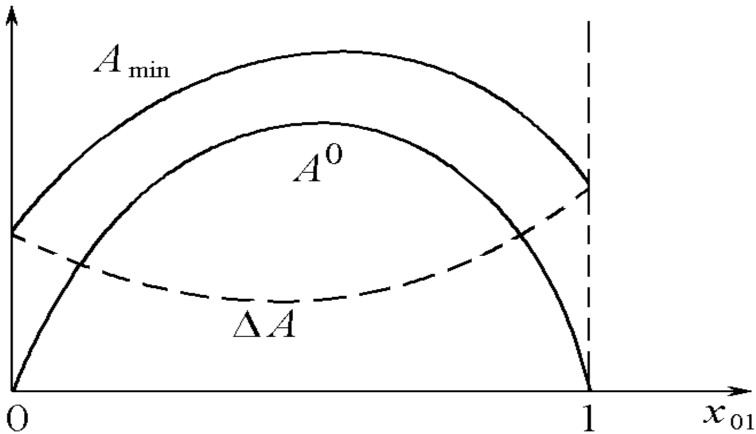

Рис. 2. Зависимость минимальной работы разделения от концентрации исходной смеси при ограниченной продолжительности процесса

$\overline{\alpha_{ij}} = \frac{\alpha_{ij}\alpha_{i0}}{\alpha_{i0}+\alpha_{ij}}$ — приведенный коэффициент массопереноса, вычисляемый через коэффициент массопереноса при контакте преобразователя и i-го потока в исходной смеси α_{i0} и в j-ом потоке на выходе.

$$A_{\min} = RTN_0 \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} + \frac{N_0^2}{\tau} \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2 \sum_j \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}}. \tag{37}$$

На Рис. 2 показаны первое слагаемое этого выражения — обратимая работа разделения, второе слагаемое — минимальные затраты из-за необратимости, и $A_{\min}$ для смеси из двух компонент и полного разделения. Видно, что обратимая оценка дает очень большую погрешность для «бедных» смесей.

4.2. Микроэкономика. *Прибыльность* — максимальный капитал, который можно извлечь в системе ЭА с разными начальными состояниями за время τ.

Заданы для каждого из m ЭА начальные запасы ресурса, капитала и соответствующая им оценка $p_i(N_{i0}, N_i)$. Система может включать или не включать резервуар с оценкой p_-. Посредник меняет цены закупок (продаж) $C_i(t), i = 1, \ldots, m$ так, чтобы извлечь максимальную прибыль

$$\dot{N}_i = -n_i(p_i, C_i), \quad N_i(0) = N_i^0, \tag{38}$$

$$\dot{N}_{i0} = C_i n_i(p_i, C_i), \quad N_{i0}(0) = N_{i0}^0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{39}$$

Прибыльность при $\tau \to \infty$ — аналог эксергии в термодинамике, она равна

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{N_i^0}^{\overline{N_i}} p_i(N_i, N_{i0}) dN_i, \tag{40}$$

где $\overline{N_i}$ в системе с резервуаром определяются условиями равновесия

$$p_i(\overline{N_i}, \overline{N_{i0}}) = p_-, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{41}$$

Если в системе нет резервуара, то в правой части равенства (41) стоит равновесная оценка $\overline{p}$, которая в свою очередь определяется условием ненакопления ресурса посредником

$$\sum_{i=1}^{N} (\overline{N_i}(\overline{p}) - N_i^0) = 0. \tag{42}$$

При конечном τ справедливо то же утверждение, что и в задаче о максимальной работе. *А именно, цены $C(t)$ должны изменяться так, чтобы при контакте с любым из ЭА были выполнены условия минимальной диссипации капитала.* Эти условия определяют оптимальную цену C_i^* как функцию текущего запаса N_i ресурса у i-го ЭА и его конечного запаса $N_i(\tau) = \overline{N_i}$ $C_i^*(N_i, \overline{N_i})$. Для того, чтобы найти $\overline{N_i}$, в [6] получены условия

$$C_i^*(N_i, \overline{N_i}) + \int\limits_{N_i^0}^{\overline{N_i}} \frac{\partial C_i^*}{\partial \overline{N_i}} dN_i = \Lambda, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N_i} = \sum_{i=1}^{n} N_i^0. \tag{44}$$

5. Системы с нестационарными резервуарами

Для нестационарного случая извлечение работы в термодинамике и прибыли в микроэкономике возможно при взаимодействии не с несколькими, а только с одной подсистемой. Мы остановимся только на этом случае, хотя решение найдено и для нескольких нестационарных подсистем.

5.1. Термодинамика. Рассмотрим тепломеханическую систе- му, состоящую из резервуара с температурой $T_0(t)$ и тепловой машины, температура рабочего тела которой $T(t)$. Нужно изменять $T(t)$ так, чтобы средняя мощность машины на конечном либо на бесконечном ($T_0(t)$ — стационарный случайный процесс) интервале была максимальна. В [12, 30] получено условие оптимальности

$$\frac{1}{T^2}\frac{q(T_0,T)}{\frac{\partial q}{\partial T}} - \frac{1}{T} = \mathrm{Const} \quad \forall\, t. \tag{45}$$

В частности, для ньютоновского закона теплообмена
$q(T_0,T) = \alpha(T_0 - T)$

$$T^*(T_0) = <\sqrt{T_0(t)}> \sqrt{T_0(t)} \quad \forall\, t$$

где $< m >$ — математическое ожидание $m(t)$. Максимально достижимая мощность для случая, когда плотность распределения T_0, равномерная в интервале (T_{01}, T_{02}), равна

$$\overline{p_{\max}} = \alpha\left[\frac{T_{01}+T_{02}}{2} - \frac{4}{9}\left(\frac{T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2}}{T_{02} - T_{01}}\right)^2\right]. \tag{46}$$

5.2. Микроэкономика. Задача извлечения максимальной прибыли при обмене с нестационарным экономическим резервуаром реализуется при покупке и продаже ценных бумаг в условиях, когда их равновесная цена на рынке зависит от внешних факторов и не зависит от интенсивности покупок (продаж) посредника. Обозначим через $p_0(t)$ равновесную цену рынка, через $p(t)$ цену, назначаемую посредником, а через $g(p_0, p)$ — поток закупок (продаж). Справедливы условия [4] оптимального выбора $p(t)$

$$(47)\qquad \frac{g(p_0,p)}{\frac{\partial g(p_0,p)}{\partial p}}+p=\lambda.$$

$$(48)\qquad \lambda=\left(\int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}p\,dt\right):\left(\int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}dt\right).$$

В [4] приведено решение этой задачи для случая, когда $p(t)$ — стационарный случайный процесс, а в [37] рассмотрено влияние задержки в оплате закупок и продаж.

6. Область реализуемых состояний МС

Кроме прямых ограничений на состояние МС, наложенных в конкретной задаче, для этих систем характерны ограничения, возникающие из-за того, что в замкнутых системах показатель необратимости может только возрастать, а в открытых системах диссипация (энергии, капитала) неотрицательна.

Общая методология построения области реализуемости для замкнутых МС, включающих активные подсистемы, такова:

1. Записывают уравнения балансов, включая в их число балансовое соотношение по фактору необратимости S.

Для ТД систем — это уравнения материального энергетического и энтропийного баланса. Для МЭ систем — балансы по ресурсам, капиталу и функции благосостояния. Уравнение для фактора необратимости включает диссипацию $\sigma \geq 0$, поэтому, разрешая это уравнение относительно σ, мы приходим к неравенству, ограничивающему область реализуемости. Граница этой области D_0 соответствует обратимым процессам.

2. При ограничениях, наложенных на продолжительность процесса, находят минимальное значение $\sigma = \sigma_{\min}$, при котором может быть достигнуто то или иное состояние. Этому значению соответствует процесс минимальной диссипации. Вместо неравенства $\sigma \geq 0$ в балансовое соотношение по S войдет условие $\sigma \geq \sigma_{\min}(\tau)$, что сужает область реализуемых состояний до $D(\tau) \subset D_0$.

Иллюстрацией может служить область реализуемости тепловой машины в координатах: поток полученного тепла q_+, мощность p (Рис. 3).

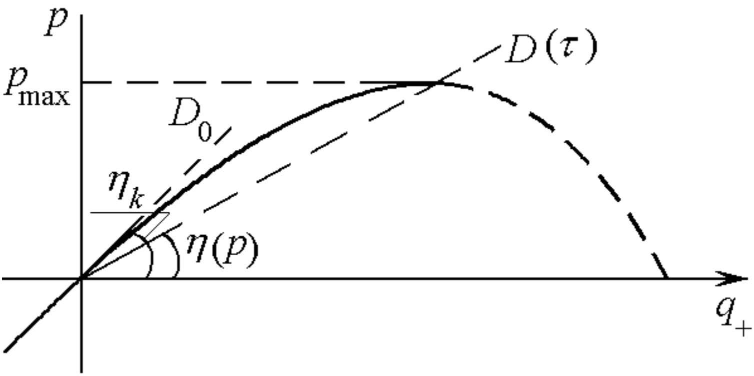

Рис. 3. Характер зависимости мощности от затрат тепла

Обратимая область реализуемости ($\tau \to \infty,\ p \to 0$) не ограничена и лежит под прямой, наклон которой равен КПД Карно

$$\eta_k = 1 - \frac{T_-}{T_+}.$$

КПД для машины с мощностью p не превышает своего значения на границе D

$$\eta(p) \leq \frac{1}{2}\left(\eta_k + \frac{p}{\overline{\alpha}T_+}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{p}{\overline{\alpha}T_+} + \eta_k\right)^2 - \frac{p}{\overline{\alpha}T_+}}. \tag{49}$$

Аналогично можно построить области реализуемости для процессов разделения, теплообменных систем и др. [23].

6.1. Микроэкономика. Множество реализуемости МЭ систем определяется балансовыми соотношениями по товарным ресурсам и капиталу и требованием, чтобы диссипация капитала σ была не меньше, чем соответствующая оптимальному при данных ограничениях процессу. Это неравенство при $\sigma = 0$ соответствует процессам сколь угодно большой продолжительности или функциям спроса и предложения со сколь угодно большим наклоном. В остальных случаях $\sigma_{\min}$ зависит от τ или от интенсивности процессов.

Например, для посредника между двумя рынками с ценами p_1, p область реализуемости в координатах «затраты на закупку, поток прибыли» имеет вид, аналогичный Рис. 3.

Наклон прямой D_0 равен $\eta_0 = \frac{p_+}{p_-} - 1$, предельная интенсивность получения прибыли равна

$$(50) \qquad m_{\max} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{4(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})}\left[\sqrt{\alpha_2}(p_+^2-\lambda^2)+\sqrt{\alpha_1}(p_-^2-\lambda^2)\right],$$

$$\lambda = \frac{p_-\sqrt{\alpha_1}+p_+\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}},$$

где α_i — наклоны линейных функций спроса и предложения.

7. Заключение

Приведенные выше результаты демонстрируют близость проблематики термодинамических и микроэкономических макросистем в классе необратимых процессов. Многие задачи, связанными с наличием сегрегации, векторными нелинейными процессами минимальной диссипации и пр. не решены, другие, такие как задача поддержания стационарного режима в макросистеме с заданным распределением интенсивных переменных [51,52], не упомянуты в этом обзоре.

Список литературы

[1] Амелькин С. А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А. М., Юмагужина В. Н. *Предельные возможности тепломеханических систем. Процессы с одним источником* // Известия РАН. Энергетика. — **2**, с. 48–58. ↑

[2] Амелькин С. А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А. М., Юмагужина В. Н. *Предельные возможности тепломеханических систем с несколькими источниками* // Известия Академии наук. Энергетика. — **1**, с. 31–40. ↑

[3] Амелькин С. А., Мартинаш К., Цирлин А. М. *Оптимальные процессы в необратимых термодинамических и микроэкономических системах* // Автоматика и телемеханика. — **4**, с. 3–25. ↑1

[4] Беляева Н. П., Цирлин А. М. *Оптимальное управление покупкой и продажей ценных бумаг* // Автоматика и телемеханика. — **4**, с. 135–143. ↑5.2, 5.2

[5] Беме Б., Софиева Ю. Н., Цирлин А. М. *О характере установившегося режима для некоторых типов управляемых объектов* // Автоматика и телемеханика. — **2**, с. 7–12. ↑

[6] Колинько Н. А., Цирлин А. М. *Оптимальное управление в задачах о предельных возможностях необратимых термодинамических и экономических систем* // Известия РАН. Теория и системы управления. — **1**, с. 61–77. ↑3.2, 4.1, 4.2

[7] Колинько Н. А., Цирлин А. М. *Обратная задача оптимального управления для одного класса управляемых систем* // Автоматика и Телемеханика. — **8**. ↑2.1

[8] Кузнецов А. Г., Руденко А. В., Цирлин А. М. *Оптимальное управление в термодинамических системах с конечной емкостью источников* // Автоматика и телемеханика. — **6**, с. 56–62. ↑

[9] Линецкий С. Б., Роднянский И. Е., Цирлин А. М. *Оптимальные циклы холодильных машин и тепловых насосов* // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — **6**, с. 42–49. ↑

[10] Линецкий С. Б, Цирлин А. М. *Оценка термодинамического совершенства и оптимизация теплообменников* // Теплоэнергетика. — **10**, с. 87–91. ↑

[11] Малых В. Л.. 1987. *Термодинамические ограничения и эффективность изотермических процессов разделения*. ↑

[12] Миронова В. А., Амелькин С. А., Цирлин А. М. Математические методы термодинамики при конечном времени. — М.: Химия, 2000. ↑5.1

[13] Миронова В. А., Цирлин А. М. *Предельные возможности и оптимальная организация регенеративного теплообмена* // Теплоэнергетика. — **2**, с. 32–36. ↑

[14] Миронова В. А., Цирлин А. М., Самарин Ю. Б. *Термодинамический анализ процессов разделени газовых смесей* // Химическая промышленность. — **8**, с. 486–490. ↑

[15] Миронова В. А., Попов В. А., Самарин Ю. Б. *Термодинамический анализ и оптимизация процесса короткоцикловой безнагревной адсорбции* // Химическая промышленность. — **8**, с. 30–32. ↑

[16] Миронова В. А., Соболев В. А., Цирлин А. М. *Оптимальное управление потоками сырья и готовой продукции путем выбора цен* // Автоматика и телемеханика. — **2**. ↑

[17] Молочников Б. Э., Цирлин А. М. *Термодинамически-оптимальные профили концентраций в задачах изотермического необратимого массопереноса* // Теор. основы хим. технологии. — **2**, с. 191–197. ↑

[18] Розоноэр Л. И. *Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход)* // Автоматика и Телемеханика. — **5, 6, 8**, с. 115–132, 65–79, 82–103. ↑

[19] Розоноэр Л. И., Цирлин А. М. *Об оптимальных термодинамических процессах* // VIII Всес. совещ. по проблемам управления: Тез. докл. — М, 1980, с. 75–77. ↑

[20] Розоноэр Л. И., Цирлин А. М. *Оптимальное управление термодинамическими системами* // Автоматика и телемеханика. — **1, 2, 3**, с. 70–79, 88–101, 50–64. ↑

[21] Розоноэр Л. И., Руденко А. В., Цирлин А. М. *Использование методов оптимизации для оценки предельных возможностей абсорбционно-десорбционных циклов* // Теорет. основы хим.технологии. — **3**, с. 362–370. ↑

[22] Цирлин А. М., Амелькин С. А., Амелькина М. А. *Модель производственной фирмы в открытой микроэкономической системе* // Математическое моделирование. — **14**, № 4, с. 21–34. ↑

[23] Цирлин А. М. Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и экономике. — М.: Физматлит, 2002. ↑1, 3.1, 6

[24] Цирлин А. М. Условия оптимальности усредненных задач с нестационарными параметрами: Доклады РАН. — Т. **2**, 2000, с. 177–179. ↑4.1

[25] Цирлин А. М. *Оптимальные процессы и управление в необратимой микроэкономике* // Автоматика и Телемеханика. — **5**. ↑

[26] Цирлин А. М. Оптимальные циклы и циклические режимы. — М.: Энергоатомиздат, 1985. ↑

[27] Цирлин А. М. *Оптимальное управление процессами необратимого тепло и массопереноса* // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — **2**, с. 81–86. ↑3.1

[28] Цирлин А. М. Термодинамика экономических систем: Труды ИПС РАН. — Т. **т. 1**, 1994, с. 64–78. ↑

[29] Цирлин А. М. *Оптимальное управление обменом ресурсами в экономических системах* // Автоматика и телемеханика. — **3**, с. 116–126. ↑2.2

[30] Цирлин А. М. Методы усредненной оптимизации и их приложения. — М.: Физматлит, 1997. ↑5.1

[31] Цирлин А. М., Миронова В. А., Крылов Ю. М. Сегрегированные процессы в химической промышленности. — М.: Химия, 1986. ↑1

[32] Цирлин А. М., Алимова Н. А. *Извлечение капитала в микроэкономике (термодинамический подход* // Настоящий сборник. ↑3.2

[33] Цирлин А. М. Необратимые оценки предельных возможностей термодинамических и микроэкономических систем. — М.: Наука, 2003. ↑

[34] Цирлин А. М., Миронова В. А., Амелькин С.А. *Процессы минимальной диссипации* // Теоретические основы химической технологии. т. 31. — **6**, с. 649–658. ↑2.1

[35] Цирлин А. М., Беляева Н. А. *Предельные возможности процессов теплообмена* // Теплоэнергетика. — **9**, с. 53–55. ↑2.1

[36] Цирлин А. М. *Второй закон термодинамики и предельные возможности тепловых машин* // Журнал технической физики. т. 69. — **1**, с. 140–142. ↑

[37] Цирлин А. М. *Оптимизация деятельности посредника в условиях задержки поставок и платежей* // Автоматика и телемеханика. — **3**. ↑5.2

[38] Amelkin S., Tsirlin A. M. *Optimal Choice of Prices and Flows in a Complex Open Industrial System* // Open Sys. & Information Dyn. — **8**, с. 169–181. ↑

[39] Berry R. S., Kasakov V. A., Sieniutycz S., Szwast Z., Tsirlin A. M. Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes. — Chichester: Wiley, 1999. ↑1

[40] Martinas K. Irreversible microeconomics // Complex Systems in Natural and Economic Sciences. — Matrafured, 1995. ↑

[41] Mironova V., Tsirlin A., Kazakov V., Berry R. S. *Finite-time thermodynamics: Exergy and optimization of time-constrained processes* // J.Appl. Phys. — **76**, с. 629. ↑

[42] Samuelson P. A. *Maximum Principle in Analytical Economics* // The Am. Econ. Rev. — **B 2**, с. 249–262. ↑

[43] Tatarinow A. W., Tsirlin A. M. *Dynamics of Heat Transfer* // Thermal Enginering. — **2**, c. 38–41. ↑

[44] Tsirlin A. M., Kazakov V. *Maximal work problem in finite-time thermodynamics*. — **Phys. Rev. E.** ↑

[45] Tsirlin A. M., Amelkin S. A. *Dissipation and Conditions of Equilibrium for an Open Microeconomic System* // Open Sys. & Information Dyn. — **8**, c. 157–168. ↑

[46] Tsirlin A. M, Kazakov V., Kolinko N. A. *A Minimal Dissipation Type-Based Classification in Irreversible Thermodynamics and Microeconomics* // Europ.Phys.Jorn. B. — **35**, c. 565–570. ↑2.1

[47] Tsirlin A. M., Kazakov V., Kolinko N. A. *Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: I. Thermodynamics* // Open Sys. & Information Dyn. — **8**, c. 315–328. ↑

[48] Tsirlin A. M., Kazakov V., Kolinko N. A. *Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: II. Microeconomics* // Open Sys. & Information Dyn. — **8**, c. 329–347. ↑2.2, 3.2

[49] Tsirlin A. M., Kazakov V. A., Berry R. S. *Finite-time thermodinamics: limiting performance of rectification and minimal entropy production in mass transfer* // J. of Ph.Chem. — **98**, c. 3330–3336. ↑

[50] Tsirlin A. M., Mironova V. A., Amelkin S. A., Kazakov V. A. *Finite-time thermodynamics: Conditions of minimal dissipation for thermodynamic process with given rate* // Physical Review E. — **58**, № 1. ↑

[51] Tsirlin A. M., Sofiev M. A., Kazakov V. A. *Finite-time thermodynamics. Active potentiostatting* // J. Phys. D: Appl. Phys. — **31**, c. 2264–2268. ↑7

[52] Tsirlin A. M., Andreev D. A., Moguto V. A., Kazakov V. A. *Optimal thermostatting* // Int. J. Thermodynamics. — **6**, № 2, c. 79–84. ↑7

Исследовательский центр системного анализа ИПС РАН

A. M. Tsirlin. *Limiting possibilities of macrosystems.* (in russian.)

Abstract. In work the review of results of the works which have been done in 1989-2004 years at the SARC PSI RAN is given. In works the limiting opportunities of macrosystems in thermodynamics and microeconomics were investigated.