Выпуклость полуконтинуумов в заданных направлениях

С. В. Знаменский Е. А. Знаменская *

17 декабря 2002 г.

Аннотация

Исследование уравнений свертки в комплексной области привело к возникновению понятия выпуклости множества в избранных направлениях. В настоящее время используется несколько не вполне эквивалентных определений этого понятия. Статья содержит картину взаимосвязей различных определений выпуклости плоского полуконтинуума в заданных направлениях. Библ. 27.

Содержание

1 Введение

Известный результат Б. Мальгранжа [1], [2] характеризует выпуклость области в $\mathbb{R}^n$ как естественное условие для разрешимости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Аналогичные утверждения известны и для некоторых классов обобщенных функций [3–5]. Столь же естественно задача о разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99-01-00951).

приводит к условию на область, формулирующемуся в терминах выпуклости в направлении [6], [7].

Несколько ранее зародилось [8], [9] и было выделено у И. Ф. Красичкова-Терновского [10] в связи с одной задачей о спектральном синтезе эквивалентное условие на область. Оно было названо *θ-сегментальностью с дефектом* 0 в честь сегмента кривой, соединяющего две точки, который заменил отрезок в определении выпуклого множества. Однако непригодность этого условия для множеств, не являющихся линейно связными, и полученная одним из авторов наглядная интерпретация повлияли на возникновение и закрепление термина «выпуклость в направлении». Этот термин отражает следующие свойства этого понятия, установленные в [7] для односвязных областей и связных компактов в $\mathbb{C}$ со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$: множество выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло во всех направлениях; пересечение множеств выпукло в общих направлениях выпуклости; непрерывная на промежутке функция выпукла тогда и только тогда, когда ее график выпукл в определенных направлениях; эквивалентность внутреннего (связность пересечения с любой полуплоскостью с заданным направлением внутренней нормали) и внешнего (связность дополнения множества до любой полуплоскости с заданным направлением внешней нормали) определений выпуклости в направлении.

Работы последних лет [11–16] свидетельствуют о том, что задачи, вызвавшие к жизни понятие выпуклости в направлении, ставятся и решаются для множеств, не являющихся областями или связными компактами. В настоящее время существует несколько определений выпуклости в направлении, используемых в различных ситуациях и в простых случаях эквивалентных. В связи с этим естественно возникает вопрос о равносильности и взаимосвязи известных определений в различных классах множеств и выявлении основных свойств выпуклости в направлении для множеств, не являющимися априори областями или компактами.

Одним из необходимых условий разрешимости линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэфиицентами в пространстве функций, аналитических на плоском множестве, является его базисная односвязность [17]. Поскольку все базисно односвязные множества являются полуконтинуумами [18], то в данной работе мы ограничимся их рассмотрением.

2 Простые определения выпуклости в направлении и их связи

Термин «выпуклость в направлении» первоначально [19] означал связность пересечения множества с любой прямой, проходящей в заданном направлении (параллельной заранее заданной прямой). При исследовании вопроса о разрешимости уравнения свертки [8, гл.III] было выделено геометрическое условие, которое окончательно оформилось в [9] и заключается в выпуклости множества в направлении мнимой оси. Там же [9] оно было названо «y-выпуклостью». К сожалению, такое определение не соответствует встречающемуся в традиционных курсах математического анализа противопоставлению графиков функций, выпуклых вверх и выпуклых вниз.

Каким же должно быть естественное определение выпуклости множества в заданном направлении? Для ответа на этот вопрос воспользуемся сакраментальным пояснением преподавателя математического анализа: парабола выпукла вверх, если «водичка с нее стекает, — вторая производная отрицательна» и выпукла вниз, если «водичка в ней остается, — вторая производная положительна» и рассмотрим множества на плоскости, с которых «водичка стекает». Вопрос в том, как строго математически определить «стекание водички». Можно представить себе дополнение к множеству, заполненное водой до определенного уровня. Каждая капля должна иметь возможность вытечь, т.е. множество точек воды не должно иметь ограниченных связных (а может быть, линейно связных?) компонент. Множество точек воды — это дополнение множества до открытой или замкнутой нижней полуплоскости? В некоторых имеющихся определениях используется не дополнение до нижней полуплоскости, а пересечение с верхней.

Будем обозначать $\mathbb{C}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ и $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant 0 \,\} \cup \{\infty\}$. Там, где это удобно, наряду с обозначением $-\overline{\mathbb{C}}_+$ для замкнутой левой полуплоскости ($-\mathbb{C}_+$ для открытой) мы будем использовать обозначение $\overline{\mathbb{C}}_-$ (соответственно $\mathbb{C}_-$). Для произвольных множества $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ пусть $\alpha \pm \beta Q = \{\, \alpha \pm \beta z : z \in Q \,\}$, где $\alpha \pm \beta\infty = \infty$.

Напомним, что *полуконтинуум* это такое множество, любые две точки которого можно соединить связным компактным подмножеством. Объединение всех континуумов, содержащих данную точку p, называется *конституантой* этой точки. Частным случаем полуконтинуумов являются *линейно связные* множества — это множества, любые две точки которых можно соединить непрерывной кривой с концами в данных точках; кроме того, согласно [20, с.551] можно считать эти кривые простыми.

Для краткости обозначим рассматриваемое условие первой буквой английских слов и сочетаний “arcwise connected"(линейно связное), “semicontinuum"(полуконтинуум), “connected"(связное), поставив над ней черту, если полуплоскости рассматриваются замкнутые и добавив штрих, если речь идет о пересечении.

Получаем следующие условия:

(a) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ линейно связно;

(s) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;

(c) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ связно;

($\overline{\mathrm{a}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ линейно связно;

($\overline{\mathrm{s}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;

($\overline{\mathrm{c}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ связно;

(a$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ линейно связно;

(s$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ полуконтинуум;

(c$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ связно;

($\overline{\mathrm{a}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ линейно связно;

($\overline{\mathrm{s}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ полуконтинуум;

($\overline{\mathrm{c}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ связно.

В [6], [7], [11–16], [21–23] использованы условия ($\overline{\mathrm{c}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}$), (c$'$), (c), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), остальные добавлены для полноты картины. В [7] для односвязных областей и континуумов со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ рассмотрены взаимосвязи между условиями ($\overline{\mathrm{c}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}$), (c$'$), (c). В [13] для линейно связных множеств с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ и, в частности, для областей с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$, показана равносильность условий ($\overline{\mathrm{c}}'$) и ($\overline{\mathrm{a}}'$). В [15] для полуконтинуумов с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ доказана эквивалентность условий ($\overline{\mathrm{c}}'$) и ($\overline{\mathrm{s}}'$).

В [24] была предпринята попытка исследования взаимосвязи между данными условиями. Уточненная картина взаимосвязи приводится в настоящей работе, а ее полнота доказывается в следующей статье.

2.1 Вспомогательные утверждения

Согласно известному определению (см., например, [25, с.136], множество M связно, если его нельзя разбить на два непустых отделимых подмножества $M = X \cup Y$, $(\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{Y} \cap X) = \varnothing$. Такие X и Y будем называть *отделенными частями* несвязного множества M.

Обозначим через $\mathrm{Conn}(M, X)$ объединение всех связных компонент множества $X \subset \overline{\mathbb{C}}$, имеющих непустое пересечение с $M \subset \overline{\mathbb{C}}$. По определению $\mathrm{Conn}(M, X) = \varnothing$, если $M \cap X = \varnothing$.

Все утверждения этого параграфа приводим без доказательства.

Лемма 1. *Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — жорданова область с границей $\gamma_1 \cup \gamma_2$, где γ_1, γ_2 — кривые с общими концами a и b. Пусть, кроме того, K_1 и K_2 — континуумы, соединяющие точки $z \in D$ и $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, причем $K_1 \cap \gamma_1 = K_2 \cap \gamma_2 = \varnothing$. Тогда точки a и b принадлежат разным связным компонентам множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_1 \setminus K_2$.*

Лемма 2. *Пусть множества M, $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяют одному из условий*

(O) X открыто;

(C) M и X компактны одновременно.

Тогда множество $\mathrm{Conn}(M,X)$ *открыто в случае* (O) *и компактно в случае* (C)*. Кроме того, в любом из этих случаев*

1. *если связно X или $M \cap X$, то связно* $\mathrm{Conn}(M,X)$*;*
2. $\partial\,\mathrm{Conn}(M,X) \subset \partial X$.

Лемма 3. *(о континууме в цепочке связных множеств) Пусть континуумы $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ и связное множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ таковы, что $(A \cap C) \subset \partial C$ и $(A \cup B) \cap D = \varnothing$. Тогда существует континуум X, удовлетворяющий условиям*

$$(A \cap B) \subset X \subset (B \setminus C) \cup (\partial C \setminus D).$$

Лемма 4. *Если в условиях леммы о континууме в цепочке связных множеств B–простая кривая, а ∂C–простая замкнутая кривая, то полученный континуум X линейно связен.*

Из лемм 3 и 4 легко получаются

Предложение 2.1. *Пусть $M \subset \overline{\mathbb{C}}$–линейно связное множество со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$, $G \subset \overline{\mathbb{C}}$–область. Тогда условие полуконтинуальности $M \cap G$ эквивалентно линейной связности $M \cap G$.*

и

Предложение 2.2. *Пусть $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ линейно связно и $G \subset \overline{\mathbb{C}}$–жорданова область. Тогда условие полуконтинуальности $M \setminus G$ эквивалентно линейной связности $M \setminus G$.*

2.2 Основной результат

При доказательстве некоторых утверждений будем использовать понятие *связности между множествами* [25, с.151]: пространство M называется связным между M_1 и M_2, если любая отделенная часть M, содержащая M_1, пересекается с M_2.

Теорема 1. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ полуконтинуум. Тогда*

1° справедлива импликация $(\overline{\mathrm{c}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$*;*

2° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ полуконтинуум, то $(\mathrm{c}') \Rightarrow (\mathrm{s}')$*;*

3° если Q ограничено, то $(\mathrm{c}) \Rightarrow (\mathrm{s}')$.

Доказательство. 1°. Докажем импликацию ($\overline{\text{c}}$)⇒($\overline{\text{s}}'$) для общего случая полуконтинуальных множеств. Пусть $z_1,\ z_2 \in (\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$, $B \subset Q$ — континуум, содержащий z_1 и z_2. Без ограничения общности можно считать $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Обозначим через A (простую) кривую в $\overline{\mathbb{C}}_+$ с концами в z_1 и z_2, удовлетворяющую условию $A \cap \partial\mathbb{C}_+ = \partial\mathbb{C}_+ \cap (\{z_1\} \cup \{z_2\})$.

Применяя лемму о континууме в цепочке связных множеств к континуумам A, B, $C = \overline{\mathbb{C}}_-$ и связному множеству $\overline{\mathbb{C}}_- \setminus Q$, получаем континуум $K \subset \overline{\mathbb{C}}_+ \cap Q$, содержащий z_1 и z_2.

2°. Покажем справедливость импликации (c′)⇒(s′) для полуконтинуумов с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $z_1,\ z_2 \in (\alpha+\beta\mathbb{C}_+)\cap Q$. Без ограничения общности можно считать $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Обозначим через K континуум, соединяющий z_1 и z_2 в Q.

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $z_1,\ z_2 \in (2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$. Обозначим через K_α $(\alpha \in A)$ связные компоненты множества $(2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap K$; пусть $[a_\alpha, b_\alpha] = \mathrm{Conv}(K_\alpha \cap \partial(2\varepsilon + \mathbb{C}_+))$. Обозначим через Ω_α открытое множество, являющееся объединением всех ограниченных компонент множества $(2\varepsilon - \mathbb{C}_+) \setminus K_\alpha$.

Покажем, что $\Omega_\alpha \subset Q$. Предположим противное: найдется точка $\zeta_0 \in \Omega_\alpha \setminus Q$ и связная компонента Ω'_α множества Ω_α, содержащая ζ_0. Согласно полуконтинуальности $\overline{\mathbb{C}}\setminus Q$ существует континуум $K_{\zeta_0,\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}\setminus Q$, соединяющий ζ_0 и ∞. Пусть K_1 — содержащая ζ_0 связная компонента $K_{\zeta_0,\infty} \cap (2\varepsilon - \mathbb{C}_+)$ и $\zeta_1 \in (\overline{K}_1 \setminus K_1)$. Очевидно $\zeta_1 \in [a_\alpha, b_\alpha] \cap K_{\zeta_0,\infty}$ и $K_1 \subset \Omega'_\alpha$. Выберем $\delta > 0$ таким, что $U_\delta(\zeta_1) \cap K_\alpha = \varnothing$ и пусть $\zeta'_1 \in K_1 \cap U_\delta(\zeta_1)$.

Покажем, что точки a_α и b_α принадлежат разным компонентам множества $(\zeta'_1 + \mathbb{C}_+) \setminus K_{\zeta_0,\infty}$. Предположим противное: существует (простая) кривая $\gamma \subset (\zeta'_1 + \mathbb{C}_+) \setminus K_{\zeta_0,\infty}$ с концами в точках a_α и b_α.

Рассмотрим область D, границей которой являются кривые $\gamma_1 = \{\zeta'_1 - t,\, t > 0\}$ и $\gamma_2 = \{\zeta'_1 + t,\, t > 0\}$. Точки a_α и b_α принадлежат разным компонентам $\overline{\mathbb{C}} \setminus \partial D$, причем $\gamma_1 \cap \gamma = \varnothing$ и $\gamma_2 \cap K_\alpha = \varnothing$. Применяя лемму 1 к области D и континуумам γ и K_α, получим, что точка ζ'_1 принадлежит ограниченной компоненте множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\gamma \cup K_\alpha)$. Тем самым $K_{\zeta_0,\infty} \cap (\gamma \cup K_\alpha) \neq \varnothing$, что противоречит выбору $K_{\zeta_0,\infty}$. Следовательно, a_α и b_α принадлежат разным компонентам $(\zeta'_1 + \mathbb{C}_+) \setminus K_{\zeta_0,\infty}$. Полученное с условием (c′) противоречие показывает, что $\Omega_\alpha \subset Q$.

Для $\alpha \in A$ пусть l_α – дуга окружности, построенной на $[a_\alpha, b_\alpha]$ как на диаметре, лежащая в $2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+$ и имеющая своими концами a_α и b_α; обозначим через D_α открытый полукруг, для которого l_α является подмножеством границы. Тогда $S_\alpha = D_\alpha \cup (\overline{\Omega_\alpha} \setminus K_\alpha)$ является областью, для которой $\partial S_\alpha \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+) \subset K_\alpha$. Далее, пусть S'_α – связная компонента $S_\alpha \cap (\varepsilon + \mathbb{C}_+)$, содержащая D_α. Тогда $\partial S'_\alpha \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+) \subset Q$.

Покажем, что множество

$$K_0 = ((2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap K) \cup \overline{\Big(\bigcup_{\alpha \in A} \partial S'_\alpha \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)\Big)}$$

является континуумом, соединяющим z_1 и z_2 в $\mathbb{C}_+ \cap Q$. Компактность K_0 и включение $K_0 \subset Q$ очевидны; $z_1,\ z_2 \in K_0$. Покажем связность K_0. Предположим противное: множество K_0 несвязно и, следовательно представимо в виде объединения отделенных частей K_1 и K_2. Тем самым множества $S_1 = K_1 \cap K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$ и $S_2 = K_2 \cap K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$ являются отделенными частями множества $K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$. Обозначим $I_1 = S_1 \cap \partial(2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$ и $I_2 = S_2 \cap \partial(2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$. Множество $K \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$ связно между I_1 и I_2 (в противном случае согласно теореме 5 [25, с.153] оно несвязно и из несвязности $K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$ следует несвязность K). Тогда существуют точки $\eta_1 \in I_1$ и $\eta_2 \in I_2$ такие, что множество $K \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$ связно между η_1 и η_2. Тем самым η_1 и η_2 принадлежат одной компоненте K_α множества $K \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$.

Пусть S'_α – соответствующая по построению область для α. Связность множества $\gamma_\alpha = \partial\Omega' \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$ покажем от противного: пусть $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^1 \cup \gamma_\alpha^2$, где γ_α^1 и γ_α^2 – отделенные части γ_α. Заметим, что $l_\alpha \cap \gamma_\alpha = \{a_\alpha, b_\alpha\}$. Без ограничения общности можно считать $a_\alpha \in \gamma_\alpha^1,\ b_\alpha \in \gamma_\alpha^2$.

Возьмем $p_0 \in D_\alpha,\ p_1 = \infty$. Ни одно из множеств $\gamma_\alpha^1,\ l_\alpha$ не является разрезом между a_α и b_α, кроме того, $l_\alpha \cap \gamma_\alpha^1 = \{a_\alpha\}$ связно. Согласно теореме 7 [25, с.501] множество $\gamma_\alpha^1 \cup l_\alpha$ не является разрезом между p_0 и p_1. Далее, так как γ_α^2 также не является разрезом между p_0 и p_1 и $\gamma_\alpha^2 \cap (\gamma_\alpha^1 \cup l_\alpha) = \{b_\alpha\}$ связно, то множество $\gamma_\alpha^1 \cup \gamma_\alpha^2 \cup l_\alpha = \gamma_\alpha \cup l_\alpha = \partial S'_\alpha$ не разделяет точки p_0 и p_1. Полученное с выбором точек p_0 и p_1 противоречие показывает связность γ_α.

Поскольку $\gamma_\alpha \subset K_0$, мы получили противоречие с отделенностью K_1 и K_2. Следовательно, компакт $K_0 \subset \mathbb{C}_+ \cap Q$ связен.

3°. Покажем справедливость импликации (c)⇒(s′) для ограниченных полуконтинуумов. Пусть $z_1,\ z_2 \in (\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$. Без ограничения общности можно считать $\alpha = 0,\ \beta = 1$. Обозначим через B континуум, соединяющий z_1 и z_2 в Q. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $z_1,\ z_2 \in (2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$.

Применяя лемму о континууме в цепочке связных множеств к континуумам $A = \varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+,\ B,\ C = \varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+$ и связному множеству $D = (\varepsilon - \mathbb{C}_+) \setminus Q$, получаем континуум $K_0 \subset (\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q \subset \mathbb{C}_+ \cap Q$, содержащий z_1 и z_2. □

Теорема 2. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ линейно связно. Тогда*

1° справедлива импликация ($\overline{\mathrm{s}}'$)⇒($\overline{\mathrm{a}}'$)*;*

2° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ связно, то (s′)⇒(a′)*.*

Доказательство. 1°. Справедливость импликации ($\overline{\mathrm{s}}'$)⇒($\overline{\mathrm{a}}'$) в общем случае линейно связных множеств следует из предложения 2.2, примененного к множеству Q и области $\alpha - \beta\mathbb{C}_+$.

2°. Справедливость импликации (s′)⇒(a′) для линейно связных множеств со связным дополнением следует из предложения 2.1, примененного к множеству Q и области $\alpha + \beta\mathbb{C}_+$. □

3 Точность взаимосвязей между определениями

Целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения:

Теорема 3. *В любом классе множеств, характеризуемом в терминах открытости, замкнутости, полуконтинуальности, линейной связности и связности, полуконтинуальности или линейной связности дополнения, имеют место те и только те импликации между условиями* (a), (s), (c), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a$'$), (s$'$), (c$'$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), *которые приведены в формулировках теорем раздела 2.2 или вытекают из таковых по транзитивности.*

Доказательство сформулированной теоремы распадается на ряд предложений, устанавливающих справедливость теоремы 3 для конкретных классов множеств.

Без ограничения общности можно считать $\beta = 1$.

Нумерация примеров множеств в параграфе проведена по следующему правилу: каждому множеству соотносится набор букв: c–связное, s–полуконтинуум, a–линейно связное, b–ограниченное, o–открытое, cl–замкнутое, d–область; характеристика связности дополнения до $\overline{\mathbb{C}}$ обозначается в квадратных скобках. Для примера, множество $M^2_{a.cl.[c]}$ является вторым используемым в доказательствах примером замкнутого линейно связного множества со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$.

Будем говорить, что множество M выделяет группу условий *невыполненными*, если для M все условия ($\overline{\text{a}}'$), ..., (c) выполнены, кроме указанной группы условий.

Импликации следующих вспомогательных утверждений в меньшей общности (а именно, для множеств, описываемых в терминах связности, открытости, замкнутости, ограниченности и связности или несвязности дополнения) приведены в [24, 26, 27].

Теорема 4. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тогда*

1° *справедливы импликации* (a)⇒(s)⇒(c), ($\overline{\text{a}}$)⇒($\overline{\text{s}}$)⇒($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{s}}'$)⇒(s$'$), ($\overline{\text{a}}'$)⇒(a$'$)⇒(s$'$)⇒(c$'$), ($\overline{\text{a}}'$)⇒($\overline{\text{s}}'$)⇒($\overline{\text{c}}'$)⇒(c$'$);

2° *если* $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ *связно, то* ($\overline{\text{s}}'$)⇒($\overline{\text{c}}$);

3° *если* $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ *полуконтинуум, то* ($\overline{\text{c}}'$)⇒($\overline{\text{s}}$);

4° *если* $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ *линейно связно, то* ($\overline{\text{c}}'$)⇒($\overline{\text{a}}$);

5° *если* Q *открыто, то* ($\overline{\text{c}}$)⇒($\overline{\text{s}}$) *и* (c$'$)⇒(s$'$)⇒(a$'$)⇒($\overline{\text{a}}'$);

6° *если* Q *замкнуто, то выполняются импликации* (c$'$)⇒($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{s}}$)⇒($\overline{\text{a}}$), (c)⇒(s)⇒(a);

7° если Q замкнутое множество со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$, то справедливы импликации $(\mathrm{s}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}}')$ *и* $(\mathrm{a}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}}')$.

Теорема 5. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ ограничено, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда*

1° имеют место импликации $(\overline{\mathrm{a}})\Rightarrow(\mathrm{a})$, $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\mathrm{s})$, $(\overline{\mathrm{c}})\Rightarrow(\mathrm{c})$;

2° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ связно, то $(\mathrm{s}')\Rightarrow(\mathrm{c})$;

3° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ полуконтинуум, то $(\mathrm{c}')\Rightarrow(\mathrm{s})$;

4° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ линейно связно, то $(\mathrm{c}')\Rightarrow(\mathrm{a})$;

5° если Q открыто, то $(\mathrm{c})\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$;

6° если Q замкнуто, то $(\mathrm{a})\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}})$ *и* $(\overline{\mathrm{c}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}}')$.

Теорема 6. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ связно. Тогда*

1° справедлива импликация $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}}')$;

2° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ линейно связно, то $(\mathrm{s})\Rightarrow(\mathrm{a})$;

3° если Q ограничено, то $(\mathrm{s})\Rightarrow(\mathrm{c}')$.

4 Классы линейно связных множеств

Справедливость импликаций следующих утверждений вытекает из теорем 4, 5 и 6.

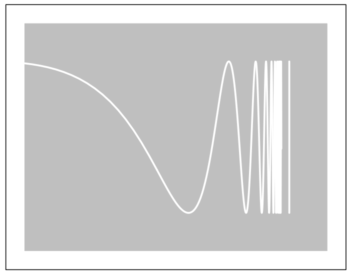
Предложение 4.1. *Для ограниченной области $Q \subset \mathbb{C}$ с линейно связным дополнением все рассматриваемые условия эквивалентны.*

Предложение 4.2. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с полуконтинуальным дополнением. Тогда равносильные условия* (c), $(\overline{\mathrm{c}})$, (s), $(\overline{\mathrm{s}})$, (c'), $(\overline{\mathrm{c}}')$, (s'), $(\overline{\mathrm{s}}')$, (a'), $(\overline{\mathrm{a}}')$ *вытекают из эквивалентных между собой условий* (a) *и* $(\overline{\mathrm{a}})$. *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Множество

$$M^1_{d.b.[s]} = \{x+iy : -3.5 < x < 0.5, |y| < 1.5\} \setminus \left\{ x + i \sin \frac{2\pi}{x} : x \in [-3.5,\, 0) \right\} \setminus [-i,\, i]$$

показывает невозможность существования импликаций к (a) и $(\overline{\mathrm{a}})$ от остальных условий в рассматриваемом случае.



$M^1_{d.b.[s]}$

В самом деле, для $M^1_{d.b.[s]}$ не выполняются условия ($\overline{\mathrm{a}}$) и (a), так как при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{d.b.[s]}$ и $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{d.b.[s]}$ не линейно связны. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область. Тогда равносильные условия* (c), ($\overline{\mathrm{c}}$), (s), ($\overline{\mathrm{s}}$) *вытекают из эквивалентных между собой условий* (a) *и* ($\overline{\mathrm{a}}$). *Равносильные условия* (c$'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$), (s$'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), (a$'$), ($\overline{\mathrm{a}}'$) *следуют из каждого из условий* (c), ($\overline{\mathrm{c}}$), (s), ($\overline{\mathrm{s}}$), (a), ($\overline{\mathrm{a}}$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. От случая ограниченной области с полуконтинуальным дополнением (предложение 4.2) рассматриваемый отличается отсутствием импликаций от условий (c$'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$), (s$'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), (a$'$), ($\overline{\mathrm{a}}'$) к остальным условиям. Множество $M^1_{d.b} = \{z : 1 < |z| < 2\}$ при $\operatorname{Re}\alpha > -1$ выделяет условия (c), ($\overline{\mathrm{c}}$), (s), ($\overline{\mathrm{s}}$), (a), ($\overline{\mathrm{a}}$) невыполненными в силу несвязности дополнения. $\square$

Справедливость импликаций следующих утверждений вытекает из теорем 4 и 6.

Предложение 4.4. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — область с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие* (c) *вытекает из равносильных между собой условий* (a) *и* (s), *а условия* ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{a}}$), (c$'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$), (s$'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), (a$'$), ($\overline{\mathrm{a}}'$) *эквивалентны. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

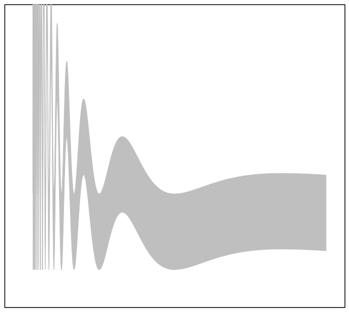
Равносильность условий ($\overline{\mathrm{a}}'$) и ($\overline{\mathrm{c}}'$) в рассматриваемом случае была показана в [13].

Доказательство. Множество

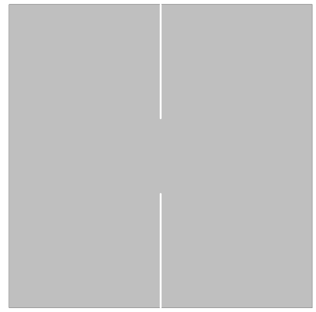
$$M^1_{d.[a]} = \left\{ x + iy : x \in (0,\, 3.5),\ \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} - 1 < y < \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} \right\},$$

выделяет условия (a) и (s) невыполненными, так как при $0 < \operatorname{Re}\alpha < 3.5$ бесконечно удаленная точка разрезает множество $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{d.[a]}$.

Множество $M^2_{d.[a]} = \{\, x + iy : x \neq 0 \quad \text{или} \quad |y| < 1 \,\}$ выделяет невыполненными условия (a), (s) и (c).



$M^1_{d.[a]}$



$M^2_{d.[a]}$

Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha = 0$ бесконечно удаленная точка разделяет множество $\mathbb{C}_- \setminus M^2_{d.[a]} = \{iy : |y| < 1\}$, тем самым условия (a), (s), (c) не следуют из остальных условий.

Для множества $M^3_{d.[a]} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ выполнены только условия (a), (s), (c): условия $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$ не выполнены при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, так как $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathbb{R}_+) \cup \{\infty\}$ не связно; условия $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, (a'), (s'), (c') не выполнены при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, так как $\mathbb{R}_+$ разделяет полуплоскости $\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+$ и $\alpha + \mathbb{C}_+$. Тем самым условия (a), (s), (c) не влекут выполнение ни одного из оставшихся условий. $\square$

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.2 и 4.4:

Предложение 4.5. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — область с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие* (c) *вытекает из условий* (a) *и* (s), *а условие* (s) *следует из* (a). *Равносильные условия $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, (c'), $(\overline{\mathrm{c}}')$, (s'), $(\overline{\mathrm{s}}')$, (a'), $(\overline{\mathrm{a}}')$ вытекают из $(\overline{\mathrm{a}})$. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Взаимосвязи между условиями $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (c'), (c) в рассмотренном случае были выявлены в [7].

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.3 и 4.5:

Предложение 4.6. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — область. Тогда условие* (c) *вытекает из условий* (a) *и* (s), *а условие* (s) *следует из* (a). *Равносильные условия $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$ следуют из $(\overline{\mathrm{a}})$; эквивалентные между собой условия (c'), $(\overline{\mathrm{c}}')$, (s'), $(\overline{\mathrm{s}}')$, (a'), $(\overline{\mathrm{a}}')$ следуют из $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$ и $(\overline{\mathrm{c}})$. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Справедливость импликаций следующих утверждений следует из теорем 4, 5, и теоремы 2.2 из нашей первой статьи этого сборника.

Предложение 4.7. *Для линейно связного континуума $Q \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ условия* (a), (s), (c), $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (a'), (s'), (c'), $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$ *равносильны.*

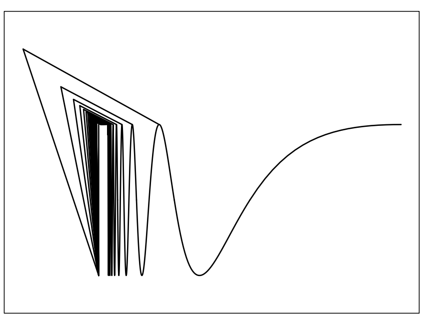
Предложение 4.8. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связный континуум. Тогда условие ($\overline{\mathrm{a}}'$) вытекает из условий* (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$). *Условие* (a$'$) *вытекает из условия* ($\overline{\mathrm{a}}'$) *и каждого из условий* (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$). *Равносильные условия* (s$'$), (c$'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$) *вытекают из условий* (a$'$), ($\overline{\mathrm{a}}'$) *и группы эквивалентных между собой условий* (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Для множества

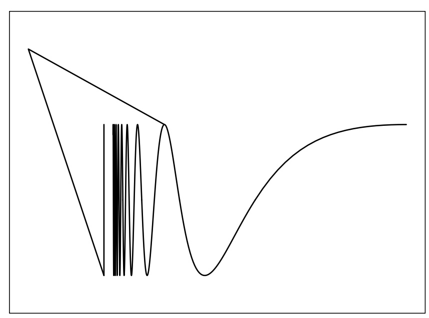
$$M^1_{a.b.cl} = \left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in (0,\,4] \right\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left[-i,\, \frac{-1+i(n+1)}{n}\right] \cup \left[\frac{-1+i(n+1)}{n},\, \frac{4}{1+4n}+i\right] \right) \cup [-i,\, i].$$

выполнены только условия (a$'$), (s$'$), (c$'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$). Действительно, невыполненность ($\overline{\mathrm{a}}'$) проявляется при $\alpha = 0$: множество $\overline{\mathbb{C}}_+ \cap M^1_{a.b.cl}$ не является линейно связным, так как точки сегмента $[-i,\, i]$ нельзя соединить непрерывной кривой с остальными точками указанного пересечения. Кроме того, при $\operatorname{Re}\alpha > -1$ множество $\mathbb{C}_- \setminus M^1_{a.b.cl}$ имеет ограниченную связную компоненту, что нарушает выполнение (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$).

Тем самым импликации от (a$'$), (s$'$), (c$'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$) к (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$) отсутствуют.



$M^1_{a.b.cl}$



$M^2_{a.b.cl}$

Для множества

$$M^2_{a.b.cl} = \left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in (0,\,4] \right\} \cup [-i,\, -1+2i] \cup \left[-1+2i,\, \frac{4}{5}+i\right] \cup [-i,\, i].$$

выполнены только ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$), (s$'$), (c$'$). Условия (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), (a$'$) не выполнены при $\operatorname{Re}\alpha > -1$. Следовательно, импликации к перечисленным условиям от ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$), (s$'$), (c$'$) отсутствуют.

Условия (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$) выделяет невыполненными пример окружности $M^3_{a.b.cl} = \{\, z : |z| = 1 \,\}$, так как при $\operatorname{Re}\alpha > -1$ множества $\overline{\mathbb{C}}_- \setminus M^3_{a.b.cl}$ и $\mathbb{C}_- \setminus M^3_{a.b.cl}$ не связны. $\square$

Справедливость импликаций следующих утверждений следует из теорем 4 и теоремы 2.2 из нашей первой статьи этого сборника.

Предложение 4.9. *Для линейно связного замкнутого множества $Q \subset \mathbb{C}$ с линейно связным (или полуконтинуальным) дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ условия* (a), (s), (c) *равносильны и не зависят от группы эквивалентных условий* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a′), (s′), (c′), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$).

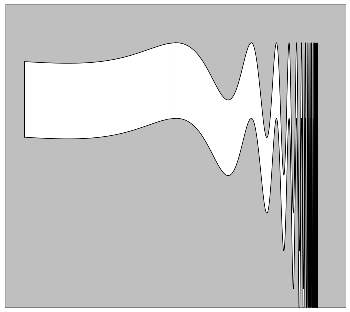
Доказательство. Для дополнения $M^1_{a.cl.[a]}$ до $\mathbb{C}$ к множеству $M^1_{o.[a]} = \{x+iy : |y| < 1, x > 0\}$ выполнены только условия (a), (s), (c). Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ бесконечно удаленная точка — отделенная часть множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus (\mathbb{C} \setminus M^1_{o.[a]}) = ((\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{o.[a]}) \cup \{\infty\}$, поэтому условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) не выполняются. Кроме того, при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ∞ разделяет пересечение множества $\mathbb{C} \setminus M^1_{o.[a]}$ с любой полуплоскостью вида $\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+$. Тем самым не выполнены условия ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$). И, наконец, множество $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap M^1_{o.[a]}$ разделяет множество $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap (\mathbb{C} \setminus M^1_{o.[a]})$ при $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, что нарушает выполнение условий (a′), (s′), (c′).

Следовательно, условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a′), (s′), (c′), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$) не вытекают из (a), (s), (c).

Множество $M^2_{a.cl.[a]} = \{z = iy : y \in \mathbb{R}\}$ выделяет условия (a), (s), (c) невыполненными, так как оно разделяет любую полуплоскость вида $\alpha - \mathbb{C}_+$ при $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Тем самым условия (a), (s), (c) не вытекают из остальных условий теоремы. □

Предложение 4.10. *Для линейно связного замкнутого множества $Q \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ условия* (a), (s), (c) *равносильны. Группа эквивалентных условий* ($\overline{\text{c}}$), (a′), (s′), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$) *вытекает из равносильных между собой условий* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{s}}$). *Условия* ($\overline{\text{c}}'$) *и* (c′) *эквивалентны и следуют из любого из условий* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a′), (s′), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Для множества $M^1_{a.cl.[c]}$, являющегося дополнением до $\mathbb{C}$ к множеству $M^1_{d.[a]}$ предложения C.5, выполнены все условия, кроме ($\overline{\text{a}}$) и ($\overline{\text{s}}$). Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ любой континуум в $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{a.cl.[c]} = (\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap (M^1_{d.[a]} \cup \{\infty\})$, соединяющий точки множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{d.[a]}$ с бесконечно удаленной точкой, обязан содержать луч $[0, +i\infty)$, не принадлежащий $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{d.[a]}$.



$M^2_{a.cl.[c]}$

Множество $M^2_{a.cl.[c]}$, являющееся дополнением до $\mathbb{C}$ к множеству $-M^1_{d.[a]}$, выделяет невыполненными условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a$'$) и (s$'$): условия ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a$'$), (s$'$) не выполнены при $-3.5 < \operatorname{Re}\alpha < 0$, так как любой континуум, соединяющий точки множества $M^2_{a.cl.[c]} \cap \{x+iy : x \in (\operatorname{Re}\alpha,\, 0), y < -1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x}\}$ с остальными точками $(\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^2_{a.cl.[c]}$ или $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap M^2_{a.cl.[c]}$, обязан содержать не принадлежащую $M^2_{a.cl.[c]}$ бесконечно удаленную точку; условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) не выполнены, так как при $-3.5 < \operatorname{Re}\alpha < 0$ бесконечно удаленная точка является отделенной частью множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^2_{a.cl.[c]} = \{x+iy :\, x \in (-3.5, \operatorname{Re}\alpha), -1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} < y < -\frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x}\} \cup \{\infty\}$.

Указанные примеры в совокупности с предложением 4.9 показывают невозможность существования других импликаций между рассматриваемыми условиями в данном случае. □

Предложение 4.11. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное замкнутое множество. Тогда условия* (a), (s), (c) *равносильны, а условие* ($\overline{\text{c}}$) *следует из эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{s}}$). *Условие* ($\overline{\text{a}}'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$). *Условия* (a$'$) *и* ($\overline{\text{s}}'$) *следуют из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$). *Условие* (s$'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a$'$). *Эквивалентные между собой условия* ($\overline{\text{c}}'$) *и* (c$'$) *следуют из каждого из условий* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a$'$) *и* (s$'$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

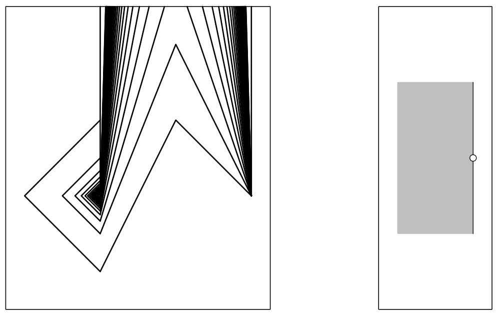
Доказательство. Множество

$$M^1_{a.cl} = i\mathbb{R}_+ \cup (2 + i\mathbb{R}_+) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{i}{k},\, -\frac{1}{k}\right] \cup \left[-\frac{1}{k},\, -\frac{i}{k}\right] \cup \left[-\frac{i}{k},\, 1 + ik\right] \cup [1+ik,\, 2] \right) \right)$$

выделяет невыполненными условия (a), (s), (c), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$): условия (a), (s), (c), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) не выполнены, так как множества

$(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{a.cl}$ и $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{a.cl}$ не связны при $\operatorname{Re}\alpha > -1$; условия $(\overline{\mathrm{a}}')$ и $(\overline{\mathrm{s}}')$ не выполнены, так как точки луча $i\mathbb{R}_+$ нельзя соединить континуумом в $\mathbb{C}_+ \cap M^1_{a.cl}$ с остальными точками этого пересечения — любой такой континуум содержит ∞.

Указанные примеры в совокупности с предложениями 4.8 и 4.10 показывают невозможность существования других импликаций между рассматриваемыми условиями в данном случае.



$M^1_{a.cl}$ $\qquad$ $M^1_{a.b.[a]}$

$\square$

Предложение 4.12. *Для линейно связного ограниченного множества $Q \subset \mathbb{C}$ с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ условия $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$ равносильны и влекут выполнение эквивалентных между собой условий (a), (s), (c), (a'), (s'), (c'). Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Множество $M^1_{a.b.[a]} = \{\, x + iy : -1 < x \leqslant 0,\ |y| < 1,\ x + iy \neq 0 \,\}$ выделяет невыполненными условия $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$: точка 0 является ограниченной компонентой множества $\overline{\mathbb{C}}_- \setminus M^1_{a.b.[a]}$ и разделяет множество $\overline{\mathbb{C}}_+ \cap M^1_{a.b.[a]} = [-i, i] \setminus \{0\}$. $\square$

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.2 и 4.12:

Предложение 4.13. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное ограниченное множество с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие (a) и группа эквивалентных между собой условий $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$ следуют из условия $(\overline{\mathrm{a}})$. Равносильные условия (s), (c), (a'), (s'), (c') следуют из каждого из условий $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (a), $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Предложение 4.14. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное ограниченное множество со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие (a) следует из условия $(\overline{\mathrm{a}})$; условие (s) — из условий (a), $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$; условие (c) равносильно условиям (a') и (s') и вытекает из каждого из условий (a), (s), $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$ и из группы эквивалентных между собой условий $(\overline{\mathrm{c}})$,*

($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$). Условие ($\overline{\mathrm{s}}$) следует из ($\overline{\mathrm{a}}$); условия ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$) — из ($\overline{\mathrm{a}}$) и ($\overline{\mathrm{s}}$); условие ($\overline{\mathrm{c}}'$) следует из каждого из условий ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$). Условие (c') следует из любого из рассматриваемых условий. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.

Доказательство. Для множества

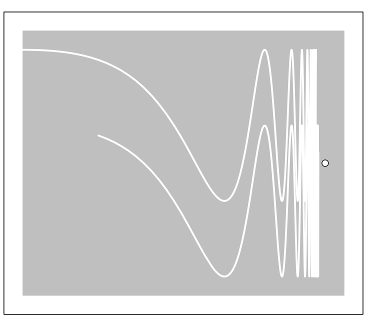
$$M^1_{a.b.[c]} = \{\, x+iy : -4 < x < 0.5,\ |y| < 2 \,\} \setminus \left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in [-4,\, 0) \right\} \setminus \left\{ x + i(\sin\frac{2\pi}{x} - 1) : x \in [-3,\, 0) \right\} \setminus \left\{ -\frac{i}{2} \right\}$$

выполнены только условия ($\overline{\mathrm{c}}'$) и (c'). Действительно, условия ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), (a), (s), (c) не выполнены, так как при $-3 < \operatorname{Re}\alpha < 0$ кривые $\left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in [-4, \operatorname{Re}\alpha) \right\}$ и $\left\{ x + i(\sin\frac{2\pi}{x} - 1) : x \in [-3, \operatorname{Re}\alpha) \right\}$ являются отделенными частями множеств $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{a.b.[c]}$ и $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{a.b.[c]}$; условия ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\mathrm{a}'$) и ($\mathrm{s}'$) не выполнены, так как при $-3 < \operatorname{Re}\alpha < 0$ любой континуум, соединяющий точки множества $\left\{ x + iy : x \in (\operatorname{Re}\alpha,\, 0),\, \sin\frac{2\pi}{x} - 1 < y < \sin\frac{2\pi}{x} \right\}$ с остальными точками $(\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{a.b.[c]}$ или $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap M^1_{a.b.[c]}$, содержит точку 0, не принадлежащую указанному пересечению.

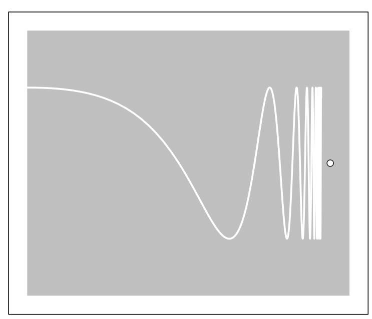
Множество

$$M^2_{a.b.[c]} = \{\, x+iy : -4 < x < 0.5,\ |y| < 1.5 \,\} \setminus \left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in [-4; 0) \right\} \setminus \{0\}$$

выделяет невыполненными условия ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), (a), (s), так как при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ континуум, соединяющий точку 0 с остальными точками множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^2_{a.b.[c]}$ или $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^2_{a.b.[c]}$, содержит отрезок $[-i,\, i]$, им не принадлежащий.



$M^1_{a.b.[c]}$



$M^2_{a.b.[c]}$

Указанные примеры в совокупности с предложением 4.13 показывают невозможность существования других импликаций между рассматриваемыми условиями в данном случае. $\square$

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.8 и 4.14:

Предложение 4.15. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ *— линейно связное ограниченное множество. Тогда условия* (a) *и* ($\overline{\text{s}}$) *вытекают из* ($\overline{\text{a}}$)*; условие* (s) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), (a)*; условие* ($\overline{\text{c}}$) *вытекает из* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{s}}$)*; условие* (c) *следует из каждого из условий* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a), (s). *Условие* ($\overline{\text{a}}'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$)*; условие* ($\overline{\text{s}}'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) *и* ($\overline{\text{a}}'$)*; условие* ($\overline{\text{c}}'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$) *и* ($\overline{\text{s}}'$)*; условие* (a$'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a), (s), (c), ($\overline{\text{a}}'$)*; условие* (s$'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a), (s), (c), ($\overline{\text{a}}'$) *и* ($\overline{\text{s}}'$)*; условие* (c$'$) *вытекает из всех рассматриваемых условий. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.4 и 4.12:

Предложение 4.16. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ *— линейно связное множество с линейно связным дополнением до* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда равносильные условия* (a$'$), (s$'$), (c$'$) *вытекают из эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$). *Условие* (c) *следует из эквивалентных условий* (a) *и* (s). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Равносильность условий ($\overline{\text{s}}'$) и ($\overline{\text{c}}'$) в рассмотренном классе множеств была доказана в [13].

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.13 и 4.16:

Предложение 4.17. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ *— линейно связное множество с полуконтинуальным дополнением до* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда равносильные условия* (a$'$), (s$'$), (c$'$) *вытекают из* ($\overline{\text{a}}$) *и из эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$)*; условия* ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) *следуют из* ($\overline{\text{a}}$). *Условие* (s) *следует из* (a)*; условие* (c) *следует из* (a) *и* (s). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.14 и 4.17:

Предложение 4.18. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ *— линейно связное множество со связным дополнением до* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда равносильные условия* (a$'$) *и* (s$'$) *вытекают из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$) *и из эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}$)*; условия* ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}$) *следуют из* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{s}}$)*; условие* ($\overline{\text{c}}'$) *вытекает из условий* ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{a}}$)*; условие* (c$'$) *вытекает из условий* ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{a}}$). *Условие* ($\overline{\text{s}}$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$)*; условие* (s) *вытекает из* (a)*; условие* (c) *следует из* (a) *и* (s). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4.8 и 4.18:

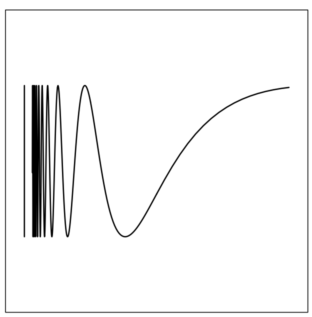
Предложение 4.19. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное множество. Тогда условия (a') и $(\overline{\mathrm{s}}')$ вытекают из $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условие (s') вытекает из $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, (a'), $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условие (c') вытекает из $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, (a'), (s'), $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$. Условие $(\overline{\mathrm{a}}')$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условие $(\overline{\mathrm{c}}')$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$. Условие $(\overline{\mathrm{s}})$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$; условие $(\overline{\mathrm{c}})$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$ и $(\overline{\mathrm{s}})$; условие (s) вытекает из (a), а (c) следует из (a) и (s). Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

5 Классы полуконтинуальных множеств

Предложение 5.1. *Утверждения предложений 4.7–4.19 сохраняют силу, если заменить требование линейной связности Q условием полуконтинуальности и одновременно исключить импликации к условиям $(\overline{\mathrm{a}}')$ и (a'), оставив импликации между $(\overline{\mathrm{a}}')$ и (a').*

Для континуумов со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ взаимосвязи между условиями $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (c'), (c) рассмотрены в [7]. Эквивалентность условий $(\overline{\mathrm{c}}')$ и $(\overline{\mathrm{s}}')$ для полуконтинуумов с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ была показана в [15].

Доказательство. Справедливость импликаций данного утверждения вытекает из соответствующих рассматриваемым случаям теорем.



$M^1_{s.b.cl.[a]}$

Отсутствие импликаций к условиям (a') и $(\overline{\mathrm{a}}')$ показывает множество $M^1_{s.b.cl.[a]} = \left\{ x + i \sin \frac{2\pi}{x} : x \in (0,\, 3.5] \right\} \cup [-i,\, i]$, выделяющее их невыполненными при $\operatorname{Re} \alpha < 0$ в силу своей полуконтинуальности, но не линейной связности. $\square$

Список литературы

[1] Malgrange B., Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, 1955–1956, 6, 271–355.

[2] Malgrange B., Sistemes différentielles á coefficients constants, Séminaire Bourbaki, Paris, 1962/63, 246.

[3] Malgrange B., Sur la propagation de la régularité des solutions des équations á coefficients constants, Bull. Math. Soc. Math. Phis. R.P.R., 1959, 3(35), 4, 433–440.

[4] Neymark H., On the existence of solutions of differential equations with constant coefficients, Arkiv för Math., 1965, 5, 433–443.

[5] Хёрмандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, Мир, М., 1986.

[6] Знаменский С. В., Об областях существования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, Препринт ИФСО-3М. Ин-т физики СО АН СССР, Красноярск, 1976.

[7] Знаменский С. В., Нетрадиционная выпуклость в направлении плоских областей и компактов и свойства голоморфных решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка, 1980, Деп. в ВИНИТИ, №3063-80 Деп.

[8] Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР,т. 39, М, 1951.

[9] Коробейник Ю. Ф., Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности, Матем. сб., 1969, 80,1, 52–76.

[10] Красичков-Терновский И. Ф., Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза, Матем. сб., 1972, 88, 3, 331–352.

[11] Коробейник Ю. Ф., О разрешимости уравнения свертки в некоторых классах аналитических функций, Матем. заметки, 1991, 49, 2, 74–83.

[12] Напалков В. В., Оператор свертки в пространствах вещественно-аналитических функций, Матем. заметки, 1991, 49, 3, 57–65.

[13] Мальцев И. М., Об эпиморфности свертки в пространствах ростков функций, аналитических на связных множествах из $\overline{\mathbb{C}}$, 1992, Деп. в ВИНИТИ, №1241-В92.

[14] Мальцев И. М., Эпиморфизм оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах, Докл. РАН., 1994, 336, 3, 297–300.

[15] Мальцев И. М., Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Необходимость, Изв. вузов. Математика, 1994, 7, 49–58.

[16] Мальцев И. М., Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Достаточность, Изв. вузов. Математика, 1994, 11, 43–52.

[17] Знаменский С.В., Знаменская Е.А. Сюрьективность оператора свертки с точечным носителем в пространстве функций, голоморфных на произвольном множестве в $\mathbb{C}$. Доклады Академии наук. Математика. Т. 376. N5. 2001.

[18] Знаменская Е.А. Выпуклость в заданном направлении базисно односвязных множеств комплексной плоскости. Комплексный анализ и дифференциальные операторы. Красноярск.2000. С.31-37

[19] Robertson M. S., Analytic functions star-like in one direction, Amer. Jorn. of math., 1936, 58, 465–472.

[20] Энгелькинг Р., Общая топология. Мир, М., 1986.

[21] Епифанов О. В., Уравнения свертки в комплексной плоскости. Исследования по теории операторов, Уфа, 1988, 48–58.

[22] Знаменский С. В., О разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций, теореме Леонтьева и формуле Вострецова, Сиб. матем. журн., 1977, 18, 6, 1307–1320.

[23] Епифанов О. В., Критерий эпиморфности оператора свертки в произвольных областях комплексной плоскости, Матем. заметки, 1982, 31, 5, 695–705.

[24] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н., Выпуклость произвольных множеств на плоскости в заданном направлении, Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I. Комплексный анализ, Уфа, 1996, 30–40.

[25] Куратовский К., Топология, Т. 2, Мир, М., 1969.

[26] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н., Выпуклость произвольных множеств на плоскости в направлении, Комплексный анализ и дифференциальные уравнения, Красноярск, 1996, 55–67.

[27] Знаменский С.В., Знаменская Л.Н., Козловская Е.А. Направления выпуклости связных множеств и разрешимость дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Электронные издания ИПС РАН. 1998. `ftp://ftp.botik.ru/pub/PSI/preprints/TR_1998_2.ps`