Выпуклость полуконтинуумов в заданных направлениях

II. Точность взаимосвязей между определениями

С. В. Знаменский Е. А. Знаменская *

9 ноября 2002 г.

Аннотация

Приводится доказательство полноты взаимосвязей различных определений выпуклости плоского полуконтинуума в заданных направлениях, описанной в статье в этом же сборнике «Выпуклость полуконтинуумов в заданных направлениях. I. Взаимосвязи определений». Библ. 6.

Содержание

Целью статьи является доказательство следующего утверждения:

Теорема 1. *В любом классе множеств, характеризуемом в терминах открытости, замкнутости, полуконтинуальности, линейной связности и связности, полуконтинуальности или линейной связности дополнения, имеют место те и только те импликации между условиями* (a)*,* (s)*,* (c)*,* $(\overline{\mathrm{a}})$*,* $(\overline{\mathrm{s}})$*,* $(\overline{\mathrm{c}})$*,* (a′)*,* (s′)*,* (c′)*,* $(\overline{\mathrm{a}}')$*,* $(\overline{\mathrm{s}}')$*,* $(\overline{\mathrm{c}}')$*, которые приведены в формулировках теорем предыдущей статьи или вытекают из таковых по транзитивности.*

Доказательство сформулированной теоремы распадается на ряд предложений, устанавливающих справедливость теоремы 1 для конкретных классов множеств.

Без ограничения общности можно считать $\beta = 1$.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99-01-00951).

Нумерация примеров множеств в параграфе проведена по следующему правилу: каждому множеству соотносится набор букв: c–связное, s–полуконтинуум, a–линейно связное, b–ограниченное, o–открытое, cl–замкнутое, d–область; характеристика связности дополнения до $\overline{\mathbb{C}}$ обозначается в квадратных скобках. Для примера, множество $M^2_{a.cl.[c]}$ является вторым используемым в доказательствах примером замкнутого линейно связного множества со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$.

Будем говорить, что множество M выделяет группу условий *невыполненными*, если для M все условия $(\overline{\mathrm{a}}')$, ..., (c) выполнены, кроме указанной группы условий.

1 Вспомогательные утверждения

Импликации следующих вспомогательных утверждений в меньшей общности (а именно, для множеств, описываемых в терминах связности, открытости, замкнутости, ограниченности и связности или несвязности дополнения) приведены в [4–6].

Теорема 2. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда*

1° *справедливы импликации* (a)⇒(s)⇒(c), $(\overline{\mathrm{a}})$⇒$(\overline{\mathrm{s}})$⇒$(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{a}}')$⇒(a$'$)⇒(s$'$)⇒(c$'$), $(\overline{\mathrm{a}}')$⇒$(\overline{\mathrm{s}}')$⇒$(\overline{\mathrm{c}}')$⇒(c$'$), $(\overline{\mathrm{s}}')$⇒(s$'$);

2° *если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ связно, то* $(\overline{\mathrm{s}}')$⇒$(\overline{\mathrm{c}})$;

3° *если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ полуконтинуум, то* $(\overline{\mathrm{c}}')$⇒$(\overline{\mathrm{s}})$;

4° *если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ линейно связно, то* $(\overline{\mathrm{c}}')$⇒$(\overline{\mathrm{a}})$;

5° *если Q открыто, то* $(\overline{\mathrm{c}})$⇒$(\overline{\mathrm{s}})$ *и* (c$'$)⇒(s$'$)⇒(a$'$)⇒$(\overline{\mathrm{a}}')$;

6° *если Q замкнуто, то выполняются импликации* (c$'$)⇒$(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}})$⇒$(\overline{\mathrm{a}})$, (c)⇒(s)⇒(a);

7° *если Q замкнутое множество со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$, то справедливы импликации* (s$'$)⇒$(\overline{\mathrm{s}}')$ *и* (a$'$)⇒$(\overline{\mathrm{a}}')$.

Теорема 3. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ ограничено, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда*

1° *имеют место импликации* $(\overline{\mathrm{a}})$⇒(a), $(\overline{\mathrm{s}})$⇒(s), $(\overline{\mathrm{c}})$⇒(c);

2° *если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ связно, то* (s$'$)⇒(c);

3° *если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ полуконтинуум, то* (c$'$)⇒(s);

4° *если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ линейно связно, то* (c$'$)⇒(a);

5° *если Q открыто, то* (c)⇒$(\overline{\mathrm{c}})$;

6° *если Q замкнуто, то* (a)⇒$(\overline{\mathrm{a}})$ *и* $(\overline{\mathrm{c}}')$⇒$(\overline{\mathrm{s}}')$.

Теорема 4. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ связно. Тогда*

1° справедлива импликация $(\bar{\text{s}}) \Rightarrow (\bar{\text{c}}')$*;*

2° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ *линейно связно, то* $(\text{s}) \Rightarrow (\text{a})$*;*

3° если Q *ограничено, то* $(\text{s}) \Rightarrow (\text{c}')$*.*

2 Классы линейно связных множеств

Справедливость импликаций следующих утверждений вытекает из теорем 2, 3 и 4.

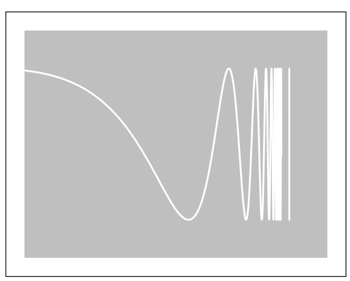
Предложение 1. *Для ограниченной области* $Q \subset \mathbb{C}$ *с линейно связным дополнением все рассматриваемые условия эквивалентны.*

Предложение 2. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная область с полуконтинуальным дополнением. Тогда равносильные условия* (c), $(\bar{\text{c}})$, (s), $(\bar{\text{s}})$, (c'), $(\bar{\text{c}}')$, (s'), $(\bar{\text{s}}')$, (a'), $(\bar{\text{a}}')$ *вытекают из эквивалентных между собой условий* (a) *и* $(\bar{\text{a}})$*. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Множество

$$M^1_{d.b.[s]} = \{x+iy : -3.5 < x < 0.5, |y| < 1.5\} \setminus \left\{ x + i \sin \frac{2\pi}{x} : x \in [-3.5,\, 0) \right\} \setminus [-i,\, i]$$

показывает невозможность существования импликаций к (a) и $(\bar{\text{a}})$ от остальных условий в рассматриваемом случае.



$M^1_{d.b.[s]}$

В самом деле, для $M^1_{d.b.[s]}$ не выполняются условия $(\bar{\text{a}})$ и (a), так как при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{d.b.[s]}$ и $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{d.b.[s]}$ не линейно связны. □

Предложение 3. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная область. Тогда равносильные условия* (c), $(\bar{\text{c}})$, (s), $(\bar{\text{s}})$ *вытекают из эквивалентных между собой условий* (a) *и* $(\bar{\text{a}})$*. Равносильные условия* (c'), $(\bar{\text{c}}')$, (s'), $(\bar{\text{s}}')$, (a'), $(\bar{\text{a}}')$ *следуют из каждого из условий* (c), $(\bar{\text{c}})$, (s), $(\bar{\text{s}})$, (a), $(\bar{\text{a}})$*. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. От случая ограниченной области с полуконтинуальным дополнением (предложение 2) рассматриваемый отличается отсутствием импликаций от условий (c′), ($\overline{\text{c}}'$), (s′), ($\overline{\text{s}}'$), (a′), ($\overline{\text{a}}'$) к остальным условиям. Множество $M^1_{d.b} = \{z : 1 < |z| < 2\}$ при $\operatorname{Re}\alpha > -1$ выделяет условия (c), ($\overline{\text{c}}$), (s), ($\overline{\text{s}}$), (a), ($\overline{\text{a}}$) невыполненными в силу несвязности дополнения. □

Справедливость импликаций следующих утверждений вытекает из теорем 2 и 4.

Предложение 4. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — область с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие* (c) *вытекает из равносильных между собой условий* (a) *и* (s)*, а условия* ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{a}}$), (c′), ($\overline{\text{c}}'$), (s′), ($\overline{\text{s}}'$), (a′), ($\overline{\text{a}}'$) *эквивалентны. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

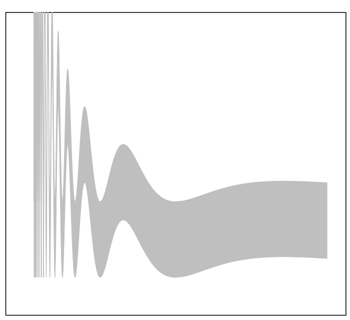
Равносильность условий ($\overline{\text{a}}'$) и ($\overline{\text{c}}'$) в рассматриваемом случае была показана в [2].

Доказательство. Множество

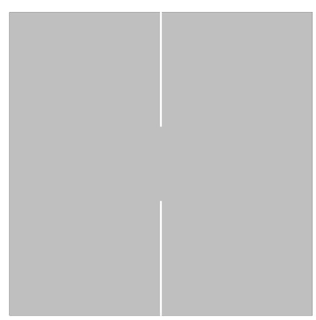
$$M^1_{d.[a]} = \left\{ x + iy : x \in (0,\, 3.5),\; \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} - 1 < y < \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} \right\},$$

выделяет условия (a) и (s) невыполненными, так как при $0 < \operatorname{Re}\alpha < 3.5$ бесконечно удаленная точка разрезает множество $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{d.[a]}$.

Множество $M^2_{d.[a]} = \{\, x + iy : x \neq 0 \quad \text{или} \quad |y| < 1 \,\}$ выделяет невыполненными условия (a), (s) и (c).



$M^1_{d.[a]}$



$M^2_{d.[a]}$

Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha = 0$ бесконечно удаленная точка разделяет множество $\mathbb{C}_- \setminus M^2_{d.[a]} = \{iy : |y| < 1\}$, тем самым условия (a), (s), (c) не следуют из остальных условий.

Для множества $M^3_{d.[a]} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ выполнены только условия (a), (s), (c): условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) не выполнены при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, так как $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap \mathbb{R}_+) \cup \{\infty\}$ не связно; условия ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), (a′), (s′), (c′) не выполнены при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, так как $\mathbb{R}_+$ разделяет полуплоскости $\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+$ и $\alpha + \mathbb{C}_+$. Тем самым условия (a), (s), (c) не влекут выполнение ни одного из оставшихся условий. □

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 2 и 4:

Предложение 5. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — область с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие* (c) *вытекает из условий* (a) *и* (s)*, а условие* (s) *следует из* (a)*. Равносильные условия* ($\overline{\text{c}}$)*,* ($\overline{\text{s}}$)*,* (c′)*,* ($\overline{\text{c}}'$)*,* (s′)*,* ($\overline{\text{s}}'$)*,* (a′)*,* ($\overline{\text{a}}'$) *вытекают из* ($\overline{\text{a}}$)*. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Взаимосвязи между условиями ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{c}}$), (c′), (c) в рассмотренном случае были выявлены в [1].

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 3 и 5:

Предложение 6. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — область. Тогда условие* (c) *вытекает из условий* (a) *и* (s)*, а условие* (s) *следует из* (a)*. Равносильные условия* ($\overline{\text{c}}$)*,* ($\overline{\text{s}}$) *следуют из* ($\overline{\text{a}}$)*; эквивалентные между собой условия* (c′)*,* ($\overline{\text{c}}'$)*,* (s′)*,* ($\overline{\text{s}}'$)*,* (a′)*,* ($\overline{\text{a}}'$) *следуют из* ($\overline{\text{a}}$)*,* ($\overline{\text{s}}$) *и* ($\overline{\text{c}}$)*. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Справедливость импликаций следующих утверждений следует из теорем 2, 3, и теоремы 2.2 из нашей первой статьи этого сборника.

Предложение 7. *Для линейно связного континуума $Q \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ условия* (a)*,* (s)*,* (c)*,* ($\overline{\text{a}}$)*,* ($\overline{\text{s}}$)*,* ($\overline{\text{c}}$)*,* (a′)*,* (s′)*,* (c′)*,* ($\overline{\text{a}}'$)*,* ($\overline{\text{s}}'$)*,* ($\overline{\text{c}}'$) *равносильны.*

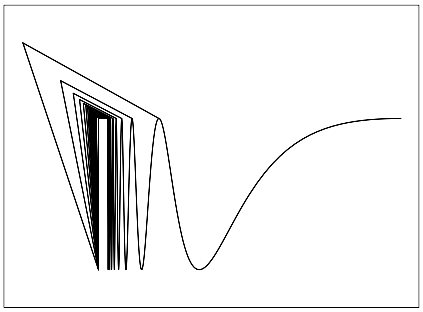
Предложение 8. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связный континуум. Тогда условие* ($\overline{\text{a}}'$) *вытекает из условий* (a)*,* (s)*,* (c)*,* ($\overline{\text{a}}$)*,* ($\overline{\text{s}}$)*,* ($\overline{\text{c}}$)*. Условие* (a′) *вытекает из условия* ($\overline{\text{a}}'$) *и каждого из условий* (a)*,* (s)*,* (c)*,* ($\overline{\text{a}}$)*,* ($\overline{\text{s}}$)*,* ($\overline{\text{c}}$)*. Равносильные условия* (s′)*,* (c′)*,* ($\overline{\text{s}}'$)*,* ($\overline{\text{c}}'$) *вытекают из условий* (a′)*,* ($\overline{\text{a}}'$) *и группы эквивалентных между собой условий* (a)*,* (s)*,* (c)*,* ($\overline{\text{a}}$)*,* ($\overline{\text{s}}$)*,* ($\overline{\text{c}}$)*. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Для множества

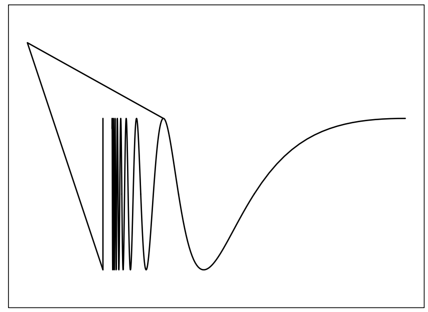
$$M^1_{a.b.cl} = \left\{ x + i \sin\frac{2\pi}{x} : x \in (0,\, 4] \right\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left[-i,\, \frac{-1+i(n+1)}{n} \right] \cup \left[\frac{-1+i(n+1)}{n},\, \frac{4}{1+4n} + i \right] \right) \cup [-i,\, i].$$

выполнены только условия (a′), (s′), (c′), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$). Действительно, невыполненность ($\overline{\text{a}}'$) проявляется при $\alpha = 0$: множество $\overline{\mathbb{C}}_+ \cap M^1_{a.b.cl}$ не является линейно связным, так как точки сегмента $[-i,\, i]$ нельзя соединить непрерывной кривой с остальными точками указанного пересечения. Кроме того, при $\operatorname{Re}\alpha > -1$ множество $\mathbb{C}_- \setminus M^1_{a.b.cl}$ имеет ограниченную связную компоненту, что нарушает выполнение (a), (s), (c), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$).

Тем самым импликации от (a′), (s′), (c′), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$) к (a), (s), (c), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$) отсутствуют.



$M^1_{a.b.cl}$



$M^2_{a.b.cl}$

Для множества

$$M^2_{a.b.cl} = \left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in (0,\, 4] \right\} \cup [-i,\, -1+2i] \cup \left[-1+2i,\, \frac{4}{5} + i \right] \cup [-i,\, i].$$

выполнены только ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$), (s$'$), (c$'$). Условия (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), (a$'$) не выполнены при $\operatorname{Re}\alpha > -1$. Следовательно, импликации к перечисленным условиям от ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$), (s$'$), (c$'$) отсутствуют.

Условия (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$) выделяет невыполненными пример окружности $M^3_{a.b.cl} = \{\, z : |z| = 1 \,\}$, так как при $\operatorname{Re}\alpha > -1$ множества $\overline{\mathbb{C}}_- \setminus M^3_{a.b.cl}$ и $\mathbb{C}_- \setminus M^3_{a.b.cl}$ не связны. □

Справедливость импликаций следующих утверждений следует из теорем 2 и теоремы 2.2 из нашей первой статьи этого сборника.

Предложение 9. *Для линейно связного замкнутого множества $Q \subset \mathbb{C}$ с линейно связным (или полуконтинуальным) дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ условия* (a), (s), (c) *равносильны и не зависят от группы эквивалентных условий* ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), (a$'$), (s$'$), (c$'$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$).

Доказательство. Для дополнения $M^1_{a.cl.[a]}$ до $\mathbb{C}$ к множеству $M^1_{o.[a]} = \{x + iy : |y| < 1, x > 0\}$ выполнены только условия (a), (s), (c). Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ бесконечно удаленная точка — отделенная часть множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus (\mathbb{C} \setminus M^1_{o.[a]}) = ((\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{o.[a]}) \cup \{\infty\}$, поэтому условия ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$) не выполняются. Кроме того, при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ∞ разделяет пересечение множества $\mathbb{C} \setminus M^1_{o.[a]}$ с любой полуплоскостью вида $\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+$. Тем самым не выполнены условия ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$). И, наконец, множество $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap M^1_{o.[a]}$ разделяет множество $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap (\mathbb{C} \setminus M^1_{o.[a]})$ при $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, что нарушает выполнение условий (a$'$), (s$'$), (c$'$).

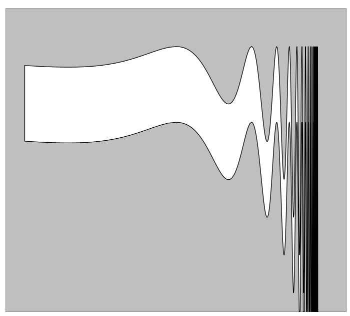
Следовательно, условия ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), (a$'$), (s$'$), (c$'$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$) не вытекают из (a), (s), (c).

Множество $M^2_{a.cl.[a]} = \{z = iy : y \in \mathbb{R}\}$ выделяет условия (a), (s), (c) невыполненными, так как оно разделяет любую полуплоскость вида $\alpha - \mathbb{C}_+$

при $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Тем самым условия (a), (s), (c) не вытекают из остальных условий теоремы. $\square$

Предложение 10. *Для линейно связного замкнутого множества $Q \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ условия* (a), (s), (c) *равносильны. Группа эквивалентных условий* ($\overline{\text{c}}$), (a′), (s′), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$) *вытекает из равносильных между собой условий* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{s}}$). *Условия* ($\overline{\text{c}}'$) *и* (c′) *эквивалентны и следуют из любого из условий* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a′), (s′), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Для множества $M^1_{a.cl.[c]}$, являющегося дополнением до $\mathbb{C}$ к множеству $M^1_{d.[a]}$ предложения C.5, выполнены все условия, кроме ($\overline{\text{a}}$) и ($\overline{\text{s}}$). Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ любой континуум в $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{a.cl.[c]} = (\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap (M^1_{d.[a]} \cup \{\infty\})$, соединяющий точки множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{d.[a]}$ с бесконечно удаленной точкой, обязан содержать луч $[0, +i\infty)$, не принадлежащий $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{d.[a]}$.



$M^2_{a.cl.[c]}$

Множество $M^2_{a.cl.[c]}$, являющееся дополнением до $\mathbb{C}$ к множеству $-M^1_{d.[a]}$, выделяет невыполненными условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a′) и (s′): условия ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a′), (s′) не выполнены при $-3.5 < \operatorname{Re}\alpha < 0$, так как любой континуум, соединяющий точки множества $M^2_{a.cl.[c]} \cap \{x + iy : x \in (\operatorname{Re}\alpha, 0), y < -1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x}\}$ с остальными точками $(\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^2_{a.cl.[c]}$ или $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap M^2_{a.cl.[c]}$, обязан содержать не принадлежащую $M^2_{a.cl.[c]}$ бесконечно удаленную точку; условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) не выполнены, так как при $-3.5 < \operatorname{Re}\alpha < 0$ бесконечно удаленная точка является отделенной частью множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^2_{a.cl.[c]} = \{x + iy : x \in (-3.5, \operatorname{Re}\alpha), -1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} < y < -\frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x}\} \cup \{\infty\}$.

Указанные примеры в совокупности с предложением 9 показывают невозможность существования других импликаций между рассматриваемыми условиями в данном случае. $\square$

Предложение 11. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное замкнутое множество. Тогда условия* (a), (s), (c) *равносильны, а условие* ($\overline{\text{c}}$) *следует из эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{s}}$). *Условие* ($\overline{\text{a}}'$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$),

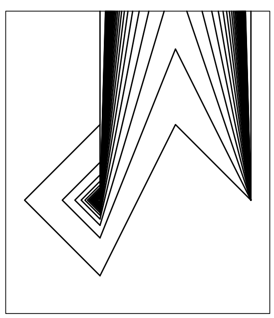
($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$). *Условия* (a$'$) *и* ($\overline{\mathrm{s}}'$) *следуют из* ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$). *Условие* (s$'$) *следует из* ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), (a$'$). *Эквивалентные между собой условия* ($\overline{\mathrm{c}}'$) *и* (c$'$) *следуют из каждого из условий* ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), (a$'$) *и* (s$'$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Множество

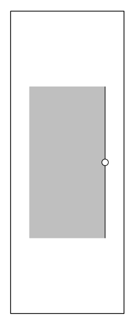
$$M^1_{a.cl} = i\mathbb{R}_+ \cup (2 + i\mathbb{R}_+) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{i}{k}, -\frac{1}{k} \right] \cup \left[-\frac{1}{k}, -\frac{i}{k} \right] \cup \left[-\frac{i}{k}, 1 + ik \right] \cup [1 + ik, 2] \right) \right)$$

выделяет невыполненными условия (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$): условия (a), (s), (c), ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$) не выполнены, так как множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{a.cl}$ и $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{a.cl}$ не связны при $\operatorname{Re}\alpha > -1$; условия ($\overline{\mathrm{a}}'$) и ($\overline{\mathrm{s}}'$) не выполнены, так как точки луча $i\mathbb{R}_+$ нельзя соединить континуумом в $\mathbb{C}_+ \cap M^1_{a.cl}$ с остальными точками этого пересечения — любой такой континуум содержит ∞.

Указанные примеры в совокупности с предложениями 8 и 10 показывают невозможность существования других импликаций между рассматриваемыми условиями в данном случае.



$M^1_{a.cl}$



$M^1_{a.b.[a]}$

□

Предложение 12. *Для линейно связного ограниченного множества* $Q \subset \mathbb{C}$ *с линейно связным дополнением до* $\overline{\mathbb{C}}$ *условия* ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$) *равносильны и влекут выполнение эквивалентных между собой условий* (a), (s), (c), (a$'$), (s$'$), (c$'$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Множество $M^1_{a.b.[a]} = \{\, x + iy : -1 < x \leqslant 0,\ |y| < 1,\ x + iy \neq 0 \,\}$ выделяет невыполненными условия ($\overline{\mathrm{a}}$), ($\overline{\mathrm{s}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$), ($\overline{\mathrm{a}}'$), ($\overline{\mathrm{s}}'$), ($\overline{\mathrm{c}}'$): точка 0 является ограниченной компонентой множества $\overline{\mathbb{C}}_- \setminus M^1_{a.b.[a]}$ и разделяет множество $\overline{\mathbb{C}}_+ \cap M^1_{a.b.[a]} = [-i, i] \setminus \{0\}$. □

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 2 и 12:

Предложение 13. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное ограниченное множество с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие* (a) *и группа эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$) *следуют из условия* ($\overline{\text{a}}$). *Равносильные условия* (s), (c), (a$'$), (s$'$), (c$'$) *следуют из каждого из условий* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Предложение 14. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное ограниченное множество со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие* (a) *следует из условия* ($\overline{\text{a}}$); *условие* (s) *— из условий* (a), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$); *условие* (c) *равносильно условиям* (a$'$) *и* (s$'$) *и вытекает из каждого из условий* (a), (s), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$) *и из группы эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$). *Условие* ($\overline{\text{s}}$) *следует из* ($\overline{\text{a}}$); *условия* ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$) *— из* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{s}}$); *условие* ($\overline{\text{c}}'$) *следует из каждого из условий* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$). *Условие* (c$'$) *следует из любого из рассматриваемых условий. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Доказательство. Для множества

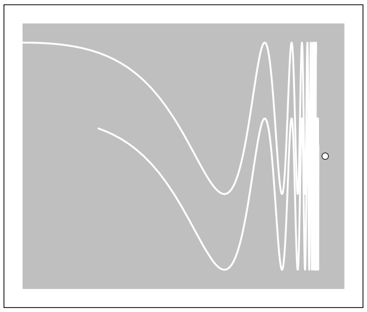
$$M^1_{a.b.[c]} = \{\, x+iy : -4 < x < 0.5,\ |y| < 2 \,\} \setminus \left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in [-4,\,0) \right\} \setminus \left\{ x + i(\sin\frac{2\pi}{x} - 1) : x \in [-3,\,0) \right\} \setminus \left\{ -\frac{i}{2} \right\}$$

выполнены только условия ($\overline{\text{c}}'$) и (c$'$). Действительно, условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$), (a), (s), (c) не выполнены, так как при $-3 < \operatorname{Re}\alpha < 0$ кривые $\left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in [-4,\,\operatorname{Re}\alpha) \right\}$ и $\left\{ x + i(\sin\frac{2\pi}{x} - 1) : x \in [-3,\,\operatorname{Re}\alpha) \right\}$ являются отделенными частями множеств $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^1_{a.b.[c]}$ и $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^1_{a.b.[c]}$; условия ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a$'$) и (s$'$) не выполнены, так как при $-3 < \operatorname{Re}\alpha < 0$ любой континуум, соединяющий точки множества $\left\{ x+iy : x \in (\operatorname{Re}\alpha,\,0),\ \sin\frac{2\pi}{x} - 1 < y < \sin\frac{2\pi}{x} \right\}$ с остальными точками $(\alpha + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap M^1_{a.b.[c]}$ или $(\alpha + \mathbb{C}_+) \cap M^1_{a.b.[c]}$, содержит точку 0, не принадлежащую указанному пересечению.

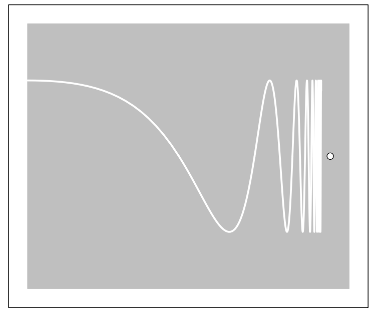
Множество

$$M^2_{a.b.[c]} = \{\, x+iy : -4 < x < 0.5,\ |y| < 1.5 \,\} \setminus \left\{ x + i\sin\frac{2\pi}{x} : x \in [-4;0) \right\} \setminus \{0\}$$

выделяет невыполненными условия ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), (a), (s), так как при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ континуум, соединяющий точку 0 с остальными точками множества $(\alpha - \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus M^2_{a.b.[c]}$ или $(\alpha - \mathbb{C}_+) \setminus M^2_{a.b.[c]}$, содержит отрезок $[-i,\,i]$, им не принадлежащий.



$M^1_{a.b.[c]}$



$M^2_{a.b.[c]}$

Указанные примеры в совокупности с предложением 13 показывают невозможность существования других импликаций между рассматриваемыми условиями в данном случае. □

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 8 и 14:

Предложение 15. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное ограниченное множество. Тогда условия* (a) *и* $(\overline{\mathrm{s}})$ *вытекают из* $(\overline{\mathrm{a}})$*; условие* (s) *следует из* $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, (a)*; условие* $(\overline{\mathrm{c}})$ *вытекает из* $(\overline{\mathrm{a}})$ *и* $(\overline{\mathrm{s}})$*; условие* (c) *следует из каждого из условий* $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (a), (s). *Условие* $(\overline{\mathrm{a}}')$ *следует из* $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$*; условие* $(\overline{\mathrm{s}}')$ *следует из* $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$ *и* $(\overline{\mathrm{a}}')$*; условие* $(\overline{\mathrm{c}}')$ *следует из* $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{a}}')$ *и* $(\overline{\mathrm{s}}')$*; условие* (a′) *следует из* $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (a), (s), (c), $(\overline{\mathrm{a}}')$*; условие* (s′) *следует из* $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (a), (s), (c), $(\overline{\mathrm{a}}')$ *и* $(\overline{\mathrm{s}}')$*; условие* (c′) *вытекает из всех рассматриваемых условий. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 4 и 12:

Предложение 16. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное множество с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда равносильные условия* (a′), (s′), (c′) *вытекают из эквивалентных между собой условий* $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$. *Условие* (c) *следует из эквивалентных условий* (a) *и* (s). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Равносильность условий $(\overline{\mathrm{s}}')$ и $(\overline{\mathrm{c}}')$ в рассмотренном классе множеств была доказана в [2].

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 13 и 16:

Предложение 17. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное множество с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда равносильные условия* (a′), (s′), (c′) *вытекают из* $(\overline{\mathrm{a}})$ *и из эквивалентных между собой условий* $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$,

$(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условия $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$ следуют из $(\overline{\mathrm{a}})$. Условие (s) следует из (a); условие (c) следует из (a) и (s). Других импликаций в рассматриваемом случае нет.

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 14 и 17:

Предложение 18. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное множество со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда равносильные условия (a') и (s') вытекают из $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$ и из эквивалентных между собой условий $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условия $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}})$ следуют из $(\overline{\mathrm{a}})$ и $(\overline{\mathrm{s}})$; условие $(\overline{\mathrm{c}}')$ вытекает из условий $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{a}})$; условие (c') вытекает из условий $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{a}})$. Условие $(\overline{\mathrm{s}})$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$; условие (s) вытекает из (a); условие (c) следует из (a) и (s). Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Справедливость следующего утверждения следует из предложений 8 и 18:

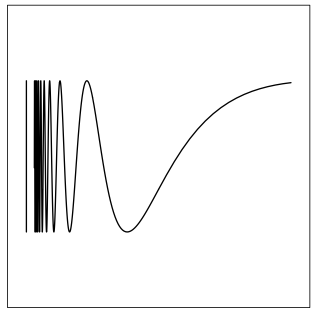
Предложение 19. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — линейно связное множество. Тогда условия (a') и $(\overline{\mathrm{s}}')$ вытекают из $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условие (s') вытекает из $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, (a'), $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условие (c') вытекает из $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, (a'), (s'), $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$. Условие $(\overline{\mathrm{a}}')$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$; условие $(\overline{\mathrm{c}}')$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{a}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$. Условие $(\overline{\mathrm{s}})$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$; условие $(\overline{\mathrm{c}})$ следует из $(\overline{\mathrm{a}})$ и $(\overline{\mathrm{s}})$; условие (s) вытекает из (a), а (c) следует из (a) и (s). Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

3 Классы полуконтинуальных множеств

Предложение 20. *Утверждения предложений 7–19 сохраняют силу, если заменить требование линейной связности Q условием полуконтинуальности и одновременно исключить импликации к условиям $(\overline{\mathrm{a}}')$ и (a'), оставив импликации между $(\overline{\mathrm{a}}')$ и (a').*

Для континуумов со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ взаимосвязи между условиями $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{c}})$, (c'), (c) рассмотрены в [1]. Эквивалентность условий $(\overline{\mathrm{c}}')$ и $(\overline{\mathrm{s}}')$ для полуконтинуумов с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ была показана в [3].

Доказательство. Справедливость импликаций данного утверждения вытекает из соответствующих рассматриваемым случаям теорем.



$M^1_{s.b.cl.[a]}$

Отсутствие импликаций к условиям (a′) и ($\overline{\text{a}}$′) показывает множество $M^1_{s.b.cl.[a]} = \left\{ x + i \sin \frac{2\pi}{x} : x \in (0, 3.5] \right\} \cup [-i, i]$, выделяющее их невыполненными при $\operatorname{Re} \alpha < 0$ в силу своей полуконтинуальности, но не линейной связности. □

Список литературы

[1] Знаменский С. В., Нетрадиционная выпуклость в направлении плоских областей и компактов и свойства голоморфных решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка, 1980, Деп. в ВИНИТИ, №3063-80 Деп.

[2] Мальцев И. М., Об эпиморфности свертки в пространствах ростков функций, аналитических на связных множествах из $\overline{\mathbb{C}}$, 1992, Деп. в ВИНИТИ, №1241-В92.

[3] Мальцев И. М., Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Необходимость, Изв. вузов. Математика, 1994, 7, 49–58.

[4] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н., Выпуклость произвольных множеств на плоскости в заданном направлении, Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I. Комплексный анализ, Уфа, 1996, 30–40.

[5] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н., Выпуклость произвольных множеств на плоскости в направлении, Комплексный анализ и дифференциальные уравнения, Красноярск, 1996, 55–67.

[6] Знаменский С.В., Знаменская Л.Н., Козловская Е.А. Направления выпуклости связных множеств и разрешимость дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Электронные издания ИПС РАН. 1998. `ftp://ftp.botik.ru/pub/PSI/preprints/TR_1998_2.ps`