Выпуклость полуконтинуумов в заданных направлениях

I. Взаимосвязи определений

С. В. Знаменский Е. А. Знаменская *

9 ноября 2002 г.

Аннотация

Исследование уравнений свертки в комплексной области привело к возникновению понятия выпуклости множества в избранных направлениях. В настоящее время используется несколько не вполне эквивалентных определений этого понятия. Статья содержит картину взаимосвязей различных определений выпуклости плоского полуконтинуума в заданных направлениях. Библ. 25.

Содержание

1 Введение

Известный результат Б. Мальгранжа [1], [2] характеризует выпуклость области в $\mathbb{R}^n$ как естественное условие для разрешимости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Аналогичные утверждения известны и для некоторых классов обобщенных функций [3–5]. Столь же естественно задача о разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка приводит к условию на область, формулирующемуся в терминах выпуклости в направлении [6], [7].

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99-01-00951).

Несколько ранее зародилось [8], [9] и было выделено у И. Ф. Красичкова-Терновского [10] в связи с одной задачей о спектральном синтезе эквивалентное условие на область. Оно было названо *θ-сегментальностью с дефектом* 0 в честь сегмента кривой, соединяющего две точки, который заменил отрезок в определении выпуклого множества. Однако непригодность этого условия для множеств, не являющихся линейно связными, и полученная одним из авторов наглядная интерпретация повлияли на возникновение и закрепление термина «выпуклость в направлении». Этот термин отражает следующие свойства этого понятия, установленные в [7] для односвязных областей и связных компактов в $\mathbb{C}$ со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$: множество выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло во всех направлениях; пересечение множеств выпукло в общих направлениях выпуклости; непрерывная на промежутке функция выпукла тогда и только тогда, когда ее график выпукл в определенных направлениях; эквивалентность внутреннего (связность пересечения с любой полуплоскостью с заданным направлением внутренней нормали) и внешнего (связность дополнения множества до любой полуплоскости с заданным направлением внешней нормали) определений выпуклости в направлении.

Работы последних лет [11–16] свидетельствуют о том, что задачи, вызвавшие к жизни понятие выпуклости в направлении, ставятся и решаются для множеств, не являющихся областями или связными компактами. В настоящее время существует несколько определений выпуклости в направлении, используемых в различных ситуациях и в простых случаях эквивалентных. В связи с этим естественно возникает вопрос о равносильности и взаимосвязи известных определений в различных классах множеств и выявлении основных свойств выпуклости в направлении для множеств, не являющимися априори областями или компактами.

Одним из необходимых условий разрешимости линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэфиициентами в пространстве функций, аналитических на плоском множестве, является его базисная односвязность [17]. Поскольку все базисно односвязные множества являются полуконтинуумами [18], то в данной работе мы ограничимся их рассмотрением.

2 Простые определения выпуклости в направлении и их связи

Термин «выпуклость в направлении» первоначально [19] означал связность пересечения множества с любой прямой, проходящей в заданном направлении (параллельной заранее заданной прямой). При исследовании вопроса о разрешимости уравнения свертки [8, гл.III] было выделено геометрическое условие, которое окончательно оформилось в [9] и заключается в выпуклости множества в направлении мнимой оси. Там же [9] оно было названо «y-выпуклостью». К сожалению, такое определение не соответствует встречающемуся в традиционных курсах математического анализа противопоставлению графиков функций, выпуклых вверх и выпуклых вниз.

Каким же должно быть естественное определение выпуклости множества в заданном направлении? Для ответа на этот вопрос воспользуемся сакраментальным пояснением преподавателя математического анализа: парабола выпукла вверх, если «водичка с нее стекает, — вторая производная отрицательна» и выпукла вниз, если «водичка в ней остается, — вторая производная положительна» и рассмотрим множества на плоскости, с которых «водичка стекает». Вопрос в том, как строго математически определить «стекание водички». Можно представить себе дополнение к множеству, заполненное водой до определенного уровня. Каждая капля должна иметь возможность вытечь, т.е. множество точек воды не должно иметь ограниченных связных (а может быть, линейно связных?) компонент. Множество точек воды — это дополнение множества до открытой или замкнутой нижней полуплоскости? В некоторых имеющихся определениях используется не дополнение до нижней полуплоскости, а пересечение с верхней.

Будем обозначать $\mathbb{C}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ и $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant 0 \,\} \cup \{\infty\}$. Там, где это удобно, наряду с обозначением $-\overline{\mathbb{C}}_+$ для замкнутой левой полуплоскости ($-\mathbb{C}_+$ для открытой) мы будем использовать обозначение $\overline{\mathbb{C}}_-$ (соответственно $\mathbb{C}_-$). Для произвольных множества $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ пусть $\alpha \pm \beta Q = \{\, \alpha \pm \beta z : z \in Q \,\}$, где $\alpha \pm \beta\infty = \infty$.

Напомним, что *полуконтинуум* это такое множество, любые две точки которого можно соединить связным компактным подмножеством. Объединение всех континуумов, содержащих данную точку p, называется *конституантой* этой точки. Частным случаем полуконтинуумов являются *линейно связные* множества — это множества, любые две точки которых можно соединить непрерывной кривой с концами в данных точках; кроме того, согласно [20, с.551] можно считать эти кривые простыми.

Для краткости обозначим рассматриваемое условие первой буквой английских слов и сочетаний “arcwise connected"(линейно связное), “semicontinuum"(полуконтинуум), “connected"(связное), поставив над ней черту, если полуплоскости рассматриваются замкнутые и добавив штрих, если речь идет о пересечении.

Получаем следующие условия:

(a) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ линейно связно;

(s) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;

(c) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ связно;

($\overline{\text{a}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ линейно связно;

($\overline{\text{s}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;

($\overline{\text{c}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ связно;

(a$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ линейно связно;

(s$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ полуконтинуум;

(c$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ связно;

($\overline{\text{a}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ линейно связно;

($\overline{\text{s}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ полуконтинуум;

($\overline{\text{c}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ связно.

В [6], [7], [11–16], [21–23] использованы условия ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{c}}$), (c$'$), (c), ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), остальные добавлены для полноты картины. В [7] для односвязных областей и континуумов со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ рассмотрены взаимосвязи между условиями ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{c}}$), (c$'$), (c). В [13] для линейно связных множеств с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ и, в частности, для областей с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$, показана равносильность условий ($\overline{\text{c}}'$) и ($\overline{\text{a}}'$). В [15] для полуконтинуумов с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ доказана эквивалентность условий ($\overline{\text{c}}'$) и ($\overline{\text{s}}'$).

В [24] была предпринята попытка исследования взаимосвязи между данными условиями. Уточненная картина взаимосвязи приводится в настоящей работе, а ее полнота доказывается в следующей статье.

2.1 Вспомогательные утверждения

Согласно известному определению (см., например, [25, с.136], множество M связно, если его нельзя разбить на два непустых отделимых подмножества $M = X \cup Y$, $(\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{Y} \cap X) = \varnothing$. Такие X и Y будем называть *отделенными частями* несвязного множества M.

Обозначим через $\operatorname{Conn}(M, X)$ объединение всех связных компонент множества $X \subset \overline{\mathbb{C}}$, имеющих непустое пересечение с $M \subset \overline{\mathbb{C}}$. По определению $\operatorname{Conn}(M, X) = \varnothing$, если $M \cap X = \varnothing$.

Все утверждения этого параграфа приводим без доказательства.

Лемма 1. *Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — жорданова область с границей $\gamma_1 \cup \gamma_2$, где γ_1, γ_2 — кривые с общими концами a и b. Пусть, кроме того, K_1 и K_2 — континуумы, соединяющие точки $z \in D$ и $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, причем $K_1 \cap \gamma_1 = K_2 \cap \gamma_2 = \varnothing$. Тогда точки a и b принадлежат разным связным компонентам множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_1 \setminus K_2$.*

Лемма 2. *Пусть множества M, $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяют одному из условий*

(O) X открыто;

(C) M и X компактны одновременно.

Тогда множество $\operatorname{Conn}(M, X)$ *открыто в случае* (O) *и компактно в случае* (C). *Кроме того, в любом из этих случаев*

1. *если связно X или $M \cap X$, то связно* $\operatorname{Conn}(M, X)$;
2. $\partial \operatorname{Conn}(M, X) \subset \partial X$.

Лемма 3. *(о континууме в цепочке связных множеств) Пусть континуумы $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ и связное множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ таковы, что $(A \cap C) \subset \partial C$ и $(A \cup B) \cap D = \varnothing$. Тогда существует континуум X, удовлетворяющий условиям*

$$(A \cap B) \subset X \subset (B \setminus C) \cup (\partial C \setminus D).$$

Лемма 4. *Если в условиях леммы о континууме в цепочке связных множеств B–простая кривая, а ∂C–простая замкнутая кривая, то полученный континуум X линейно связен.*

Из лемм 3 и 4 легко получаются

Предложение 2.1. *Пусть $M \subset \overline{\mathbb{C}}$–линейно связное множество со связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$, $G \subset \overline{\mathbb{C}}$–область. Тогда условие полуконтинуальности $M \cap G$ эквивалентно линейной связности $M \cap G$.*

и

Предложение 2.2. *Пусть $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ линейно связно и $G \subset \overline{\mathbb{C}}$–жорданова область. Тогда условие полуконтинуальности $M \setminus G$ эквивалентно линейной связности $M \setminus G$.*

2.2 Основной результат

При доказательстве некоторых утверждений будем использовать понятие *связности между множествами* [25, с.151]: пространство M называется связным между M_1 и M_2, если любая отделенная часть M, содержащая M_1, пересекается с M_2.

Теорема 1. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ полуконтинуум. Тогда*

1° справедлива импликация $(\overline{\mathrm{c}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$;

2° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ полуконтинуум, то $(\mathrm{c}') \Rightarrow (\mathrm{s}')$;

3° если Q ограничено, то $(\mathrm{c}) \Rightarrow (\mathrm{s}')$.

Доказательство. 1°. Докажем импликацию $(\overline{\mathrm{c}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$ для общего случая полуконтинуальных множеств. Пусть $z_1,\ z_2 \in (\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$, $B \subset Q$ — континуум, содержащий z_1 и z_2. Без ограничения общности можно считать $\alpha = 0,\ \beta = 1$.

Обозначим через A (простую) кривую в $\overline{\mathbb{C}}_+$ с концами в z_1 и z_2, удовлетворяющую условию $A \cap \partial\mathbb{C}_+ = \partial\mathbb{C}_+ \cap (\{z_1\} \cup \{z_2\})$.

Применяя лемму о континууме в цепочке связных множеств к континуумам A, B, $C = \overline{\mathbb{C}}_-$ и связному множеству $\overline{\mathbb{C}}_- \setminus Q$, получаем континуум $K \subset \overline{\mathbb{C}}_+ \cap Q$, содержащий z_1 и z_2.

2°. Покажем справедливость импликации (c$'$)$\Rightarrow$(s$'$) для полуконтинуумов с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть z_1, $z_2 \in (\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$. Без ограничения общности можно считать $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Обозначим через K континуум, соединяющий z_1 и z_2 в Q.

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы z_1, $z_2 \in (2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$. Обозначим через K_α ($\alpha \in A$) связные компоненты множества $(2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+) \cap K$; пусть $[a_\alpha, b_\alpha] = \mathrm{Conv}(K_\alpha \cap \partial(2\varepsilon + \mathbb{C}_+))$. Обозначим через Ω_α открытое множество, являющееся объединением всех ограниченных компонент множества $(2\varepsilon - \mathbb{C}_+) \setminus K_\alpha$.

Покажем, что $\Omega_\alpha \subset Q$. Предположим противное: найдется точка $\zeta_0 \in \Omega_\alpha \setminus Q$ и связная компонента Ω'_α множества Ω_α, содержащая ζ_0. Согласно полуконтинуальности $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ существует континуум $K_{\zeta_0,\infty} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$, соединяющий ζ_0 и ∞. Пусть K_1 — содержащая ζ_0 связная компонента $K_{\zeta_0,\infty} \cap (2\varepsilon - \mathbb{C}_+)$ и $\zeta_1 \in (\overline{K_1} \setminus K_1)$. Очевидно $\zeta_1 \in [a_\alpha, b_\alpha] \cap K_{\zeta_0,\infty}$ и $K_1 \subset \Omega'_\alpha$. Выберем $\delta > 0$ таким, что $U_\delta(\zeta_1) \cap K_\alpha = \varnothing$ и пусть $\zeta'_1 \in K_1 \cap U_\delta(\zeta_1)$.

Покажем, что точки a_α и b_α принадлежат разным компонентам множества $(\zeta'_1 + \mathbb{C}_+) \setminus K_{\zeta_0,\infty}$. Предположим противное: существует (простая) кривая $\gamma \subset (\zeta'_1 + \mathbb{C}_+) \setminus K_{\zeta_0,\infty}$ с концами в точках a_α и b_α.

Рассмотрим область D, границей которой являются кривые $\gamma_1 = \{\zeta'_1 - t,\, t > 0\}$ и $\gamma_2 = \{\zeta'_1 + t,\, t > 0\}$. Точки a_α и b_α принадлежат разным компонентам $\overline{\mathbb{C}} \setminus \partial D$, причем $\gamma_1 \cap \gamma = \varnothing$ и $\gamma_2 \cap K_\alpha = \varnothing$. Применяя лемму 1 к области D и континуумам γ и K_α, получим, что точка ζ'_1 принадлежит ограниченной компоненте множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\gamma \cup K_\alpha)$. Тем самым $K_{\zeta_0,\infty} \cap (\gamma \cup K_\alpha) \neq \varnothing$, что противоречит выбору $K_{\zeta_0,\infty}$. Следовательно, a_α и b_α принадлежат разным компонентам $(\zeta'_1 + \mathbb{C}_+) \setminus K_{\zeta_0,\infty}$. Полученное с условием (c$'$) противоречие показывает, что $\Omega_\alpha \subset Q$.

Для $\alpha \in A$ пусть l_α – дуга окружности, построенной на $[a_\alpha, b_\alpha]$ как на диаметре, лежащая в $2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+$ и имеющая своими концами a_α и b_α; обозначим через D_α открытый полукруг, для которого l_α является подмножеством границы. Тогда $S_\alpha = D_\alpha \cup (\overline{\Omega_\alpha} \setminus K_\alpha)$ является областью, для которой $\partial S_\alpha \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+) \subset K_\alpha$. Далее, пусть S'_α – связная компонента $S_\alpha \cap (\varepsilon + \mathbb{C}_+)$, содержащая D_α. Тогда $\partial S'_\alpha \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+) \subset Q$.

Покажем, что множество

$$K_0 = ((2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap K) \cup \overline{\Big(\bigcup_{\alpha \in A} \partial S'_\alpha \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+) \Big)}$$

является континуумом, соединяющим z_1 и z_2 в $\mathbb{C}_+ \cap Q$. Компактность K_0 и включение $K_0 \subset Q$ очевидны; z_1, $z_2 \in K_0$. Покажем связность K_0. Предположим противное: множество K_0 несвязно и, следовательно представимо в виде объединения отделенных частей K_1 и K_2. Тем самым множества $S_1 = K_1 \cap K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$ и $S_2 = K_2 \cap K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$ являются отделенными частями множества $K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$. Обозначим $I_1 = S_1 \cap \partial(2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$ и $I_2 = S_2 \cap \partial(2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$. Множество $K \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$ связно между I_1 и I_2 (в противном случае согласно теореме 5 [25, с.153] оно несвязно и из несвязности $K \cap (2\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+)$ следует несвязность K). Тогда существуют точки $\eta_1 \in I_1$ и $\eta_2 \in I_2$ такие, что множество $K \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$ связно между η_1 и η_2. Тем самым η_1 и η_2 принадлежат одной компоненте K_α множества $K \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$.

Пусть S'_α – соответствующая по построению область для α. Связность множества $\gamma_\alpha = \partial\Omega' \cap (2\varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+)$ покажем от противного: пусть $\gamma_\alpha = \gamma^1_\alpha \cup \gamma^2_\alpha$, где γ^1_α и γ^2_α – отделенные части γ_α. Заметим, что $l_\alpha \cap \gamma_\alpha = \{a_\alpha, b_\alpha\}$. Без ограничения общности можно считать $a_\alpha \in \gamma^1_\alpha$, $b_\alpha \in \gamma^2_\alpha$.

Возьмем $p_0 \in D_\alpha$, $p_1 = \infty$. Ни одно из множеств γ^1_α, l_α не является разрезом между a_α и b_α, кроме того, $l_\alpha \cap \gamma^1_\alpha = \{a_\alpha\}$ связно. Согласно теореме 7 [25, с.501] множество $\gamma^1_\alpha \cup l_\alpha$ не является разрезом между p_0 и p_1. Далее, так как γ^2_α также не является разрезом между p_0 и p_1 и $\gamma^2_\alpha \cap (\gamma^1_\alpha \cup l_\alpha) = \{b_\alpha\}$ связно, то множество $\gamma^1_\alpha \cup \gamma^2_\alpha \cup l_\alpha = \gamma_\alpha \cup l_\alpha = \partial S'_\alpha$ не разделяет точки p_0 и p_1. Полученное с выбором точек p_0 и p_1 противоречие показывает связность γ_α.

Поскольку $\gamma_\alpha \subset K_0$, мы получили противоречие с отделенностью K_1 и K_2. Следовательно, компакт $K_0 \subset \mathbb{C}_+ \cap Q$ связен.

3°. Покажем справедливость импликации (c)⇒(s′) для ограниченных полуконтинуумов. Пусть z_1, $z_2 \in (\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$. Без ограничения общности можно считать $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Обозначим через B континуум, соединяющий z_1 и z_2 в Q. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы z_1, $z_2 \in (2\varepsilon + \mathbb{C}_+)$.

Применяя лемму о континууме в цепочке связных множеств к континуумам $A = \varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+$, B, $C = \varepsilon - \overline{\mathbb{C}}_+$ и связному множеству $D = (\varepsilon - \mathbb{C}_+) \setminus Q$, получаем континуум $K_0 \subset (\varepsilon + \overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q \subset \mathbb{C}_+ \cap Q$, содержащий z_1 и z_2. □

Теорема 2. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ линейно связно. Тогда*

1° справедлива импликация $(\bar{\mathrm{s}}')$⇒$(\bar{\mathrm{a}}')$;

2° если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ связно, то (s′)⇒(a′).

Доказательство. 1°. Справедливость импликации $(\bar{\mathrm{s}}')$⇒$(\bar{\mathrm{a}}')$ в общем случае линейно связных множеств следует из предложения 2.2, примененного к множеству Q и области $\alpha - \beta\mathbb{C}_+$.

2°. Справедливость импликации (s′)⇒(a′) для линейно связных множеств со связным дополнением следует из предложения 2.1, примененного к множеству Q и области $\alpha + \beta\mathbb{C}_+$. □

Список литературы

[1] Malgrange B., Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, 1955–1956, 6, 271–355.

[2] Malgrange B., Sistemes différentielles á coefficients constants, Séminaire Bourbaki, Paris, 1962/63, 246.

[3] Malgrange B., Sur la propagation de la régularité des solutions des équations á coefficients constants, Bull. Math. Soc. Math. Phis. R.P.R., 1959, 3(35), 4, 433–440.

[4] Neymark H., On the existence of solutions of differential equations with constant coefficients, Arkiv för Math., 1965, 5, 433–443.

[5] Хёрмандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, Мир, М., 1986.

[6] Знаменский С. В., Об областях существования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, Препринт ИФСО-3М. Ин-т физики СО АН СССР, Красноярск, 1976.

[7] Знаменский С. В., Нетрадиционная выпуклость в направлении плоских областей и компактов и свойства голоморфных решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка, 1980, Деп. в ВИНИТИ, №3063-80 Деп.

[8] Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР,т. 39, М, 1951.

[9] Коробейник Ю. Ф., Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности, Матем. сб., 1969, 80,1, 52–76.

[10] Красичков-Терновский И. Ф., Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза, Матем. сб., 1972, 88, 3, 331–352.

[11] Коробейник Ю. Ф., О разрешимости уравнения свертки в некоторых классах аналитических функций, Матем. заметки, 1991, 49, 2, 74–83.

[12] Напалков В. В., Оператор свертки в пространствах вещественно-аналитических функций, Матем. заметки, 1991, 49, 3, 57–65.

[13] Мальцев И. М., Об эпиморфности свертки в пространствах ростков функций, аналитических на связных множествах из $\overline{\mathbb{C}}$, 1992, Деп. в ВИНИТИ, №1241-В92.

[14] Мальцев И. М., Эпиморфизм оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах, Докл. РАН., 1994, 336, 3, 297–300.

[15] Мальцев И. М., Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Необходимость, Изв. вузов. Математика, 1994, 7, 49–58.

[16] Мальцев И. М., Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Достаточность, Изв. вузов. Математика, 1994, 11, 43–52.

[17] Знаменский С.В., Знаменская Е.А. Сюрьективность оператора свертки с точечным носителем в пространстве функций, голоморфных на произвольном множестве в $\mathbb{C}$. Доклады Академии наук. Математика. Т. 376. N5. 2001.

[18] Знаменская Е.А. Выпуклость в заданном направлении базисно односвязных множеств комплексной плоскости. Комплексный анализ и дифференциальные операторы. Красноярск.2000. С.31-37

[19] Robertson M. S., Analytic functions star-like in one direction, Amer. Jorn. of math., 1936, 58, 465–472.

[20] Энгелькинг Р., Общая топология. Мир, М., 1986.

[21] Епифанов О. В., Уравнения свертки в комплексной плоскости. Исследования по теории операторов, Уфа, 1988, 48–58.

[22] Знаменский С. В., О разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций, теореме Леонтьева и формуле Вострецова, Сиб. матем. журн., 1977, 18, 6, 1307–1320.

[23] Епифанов О. В., Критерий эпиморфности оператора свертки в произвольных областях комплексной плоскости, Матем. заметки, 1982, 31, 5, 695–705.

[24] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н., Выпуклость произвольных множеств на плоскости в заданном направлении, Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I. Комплексный анализ, Уфа, 1996, 30–40.

[25] Куратовский К., Топология, Т. 2, Мир, М., 1969.