Выпуклость полуконтинуумов в заданных направлениях

Знаменский С.В., Знаменская Е.А.

Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский

Множество $Q \subset \mathbb{C}$ называется выпуклым в направлении $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ является полуконтинуумом.

В терминах выпуклости в направлении формулируются условия эпиморфности оператора свертки, в том числе условия разрешимости линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах функций, голоморфных на множествах в $\mathbb{C}$. Одним из условий разрешимости указанных уравнений на множестве $Q \subset \mathbb{C}$ является [1, 2, 3] базисная односвязность Q. В [4] замечено, что в этом случае Q и $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ являются полуконтинуумами.

Рассмотрены следующие условия:
(a) $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ линейно связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
($\overline{\text{a}}$) $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ линейно связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
(s) $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ полуконтинуум $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
($\overline{\text{s}}$) $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ полуконтинуум $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
(c) $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
($\overline{\text{c}}$) $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
(a$'$) $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ линейно связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
(s$'$) $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ полуконтинуум $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
(c$'$) $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
($\overline{\text{a}}'$) $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ линейно связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
($\overline{\text{s}}'$) $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ полуконтинуум $\forall\alpha \in \mathbb{C}$,
($\overline{\text{c}}'$) $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ связно $\forall\alpha \in \mathbb{C}$.

В [3] показано, что для линейно связных множеств в $\mathbb{C}$ с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ и, в частности, для односвязных областей с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$, условия ($\overline{\text{a}}'$) и ($\overline{\text{c}}'$) эквивалентны. В [2] для полуконтинуумов с полуконтинуальным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$ доказана равносильность условий ($\overline{\text{c}}'$) и ($\overline{\text{s}}'$).

Для полуконтинуума Q справедлива импликация ($\overline{\text{c}}$)$\Rightarrow$($\overline{\text{s}}'$). Кроме того, если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ полуконтинуум, то (c$'$)$\Rightarrow$(s$'$); если же Q−ограниченный полуконтинуум, то (c)$\Rightarrow$(s$'$). Для линейно связного множества Q доказана импликация ($\overline{\text{s}}'$)$\Rightarrow$($\overline{\text{a}}'$); если Q линейно связно и $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ связно, то (s$'$)$\Rightarrow$(a$'$).

В классе полуконтинуумов получена в некотором смысле полная картина взаимосвязи различных определений выпуклости в направлении. Приведем полученные результаты для некоторых подклассов.

Предложение 1 *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — область с линейно связным дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда условие (c) вытекает из равносильных между собой условий (a) и (s), а условия ($\overline{\text{c}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{a}}$), (c$'$), ($\overline{\text{c}}'$), (s$'$), ($\overline{\text{s}}'$), (a$'$), ($\overline{\text{a}}'$) эквивалентны. Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Предложение 2 *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ — *линейно связное множество с линейно связным дополнением до* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда равносильные условия* (a$'$), (s$'$), (c$'$) *вытекают из эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{a}}'$), ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$). *Условие* (c) *следует из эквивалентных условий* (a) *и* (s). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

Предложение 3 *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ — *полуконтинуум с полуконтинуальным дополнением до* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда равносильные условия* (s$'$), (c$'$) *вытекают из* ($\overline{\text{a}}$), ($\overline{\text{a}}'$), (a$'$) *и из эквивалентных между собой условий* ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$); *условия* ($\overline{\text{s}}'$), ($\overline{\text{c}}'$), ($\overline{\text{s}}$), ($\overline{\text{c}}$) *следуют из* ($\overline{\text{a}}$) *и* ($\overline{\text{a}}'$). *Условие* (s) *следует из* (a); *условие* (c) *следует из* (a) *и* (s); *условие* (a$'$) *вытекает из* ($\overline{\text{a}}'$). *Других импликаций в рассматриваемом случае нет.*

В доказательстве перечисленных импликаций ключевую роль имеют следующие утверждения:

Лемма 1 *(о континууме в цепочке связных множеств) Пусть континуумы* $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ *и связное множество* $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ *таковы, что* $(A \cap C) \subset \partial C$ *и* $(A \cup B) \cap D = \varnothing$. *Тогда существует континуум* X, *удовлетворяющий условиям*

$$(A \cap B) \subset X \subset (B \setminus C) \cup (\partial C \setminus D).$$

Лемма 2 *Если в условиях леммы о континууме в цепочке связных множеств* B*—простая кривая, а* ∂C*—простая замкнутая кривая, то полученный континуум* X *линейно связен.*

Отсутствие других импликаций подтверждается соответствующими примерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 99-01-00951.

Список литературы

[1] Мальцев И. М. *Эпиморфность оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах*// Докл. РАН, 1994. т.336. вып.3. С.297–300

[2] Мальцев И. М. *Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области*// Изв. вузов. Математика, 1994. вып.7,11. С.49–58, 43–52.

[3] Мальцев И. М. *Об эпиморфности свертки в пространствах ростков функций, аналитических на связных множествах из* $\overline{\mathbb{C}}$// Деп. в ВИНИТИ, 1992. №1241-В92.

[4] Шрайфель И.С. *Об эквивалентности понятий базисной односвязности и квазиконтинуальности*// Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 1998. с.139.