УДК 517.983.37

С.В. Знаменский, Е.А. Знаменская

Сюръективность оператора свертки с точечным носителем в пространстве функций, голоморфных на произвольном множестве в $\mathbb{C}$

1. Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — произвольное множество. Обозначим через $\mathscr{U}(Q)$ совокупность всех открытых множеств, содержащих Q. Голоморфность на множестве Q понимается в обычном смысле [1]: $H(Q)$ есть индуктивный предел пространств $H(U)$ по $U \in \mathscr{U}(Q)$. Функции $f \in H(U_f)$, $U_f \in \mathscr{U}(Q)$ и $g \in H(U_g)$, $U_g \in \mathscr{U}(Q)$, отождествляются, если на некотором $U \in \mathscr{U}(Q)$ они определены и совпадают. Такие функции и соответствующий им элемент из $H(Q)$ удобно не различать в обозначениях.

Пусть $\chi(z)$ — целая функция экспоненциального типа и ассоциированная по Борелю с $\chi(z)$ функция $\overline{\chi}(z)$ имеет лишь одну особую точку $a = 0$ (случай $a \neq 0$ легко сводится к этому). Для открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ интеграл

$$Ly(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} y(t)\overline{\chi}(t - z)dt$$

не зависит от стягиваемого в U контура γ, обходящего точку z в положительном направлении. Поэтому для каждого $U \in \mathscr{U}(Q)$ функция χ порождает оператор свертки из $H(U)$ в $H(U)$. Их согласованность с вложением $H(U_1) \subset H(U_2)$ при $U_1 \supset U_2$ означает, что определен оператор свертки L из $H(Q)$ в $H(Q)$ для произвольного $Q \in \mathbb{C}$.

Обозначим $LH(Q)$ образ пространства $H(Q)$ при действии оператора L. Нас интересуют условия, при которых L является отображением «на», т.е. $LH(Q) = H(Q)$.

На основе идей работ Ю.Ф. Коробейника [2] и А. Мартино [3], в [4] был установлен соответствующий критерий для области в $\mathbb{C}$. В [5] критерий распространен на континуумы со связным дополнением. Позже Ю.Ф. Коробейником [6], В.В. Напалковым и

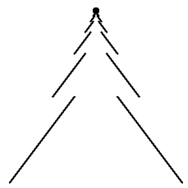
И.А. Рудаковым [7] на примере промежутков вещественной прямой было показано, что в случае множеств, не являющихся открытыми или замкнутыми, данный критерий неприменим. Значительное прояснение ситуации было достигнуто в работах И.М. Мальцева [8]–[10], окончательный результат для случая связных множеств в $\mathbb{C}$ был представлен авторами в [11].

Предложение 1 [11]. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ связно. Равенство $LH(Q) = H(Q)$ справедливо тогда и только тогда, когда для произвольной окрестности $U \supset Q$ существует такая содержащаяся в U область $\Omega \supset Q$, что $LH(\Omega) = H(\Omega)$.*

2. Формулировка предложения 1 любопытна тем, что она сводит исследование случая произвольного связного множества в $\mathbb{C}$ к той же задаче для области. Было бы интересно узнать, справедливо ли аналогичное утверждение для других операторов.

Пример 1. Каждая связная компонента множества

$$Q = \{0\} \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{a=\pm 2^{-n}} [a - 2ai,\, a/4 - ai] \Big)$$



выпукла. Кроме того,

(1) $LH(Q) = H(Q)$ для любого оператора L с характеристической функцией $\chi \in [1, 0]$;

(2) окрестность $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ множества Q не содержит ни одной выпуклой окрестности этого множества.

Поскольку существует $\chi \in [1, 0]$, для которой $LH(\Omega) = H(\Omega)$ лишь в выпуклых областях Ω, то для несвязных множеств предложение 1 не имеет места.

Следуя [4], будем называть $\beta \in \Delta = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ *направлением выпуклости* области $\Omega \subset \mathbb{C}$, если пересечение Ω и любой открытой полуплоскости с направлением внутренней нормали β связно. Обозначим $[\chi]$ множество предельных точек последовательности $\left\{ \frac{\zeta_k}{|\zeta_k|} \right\}$, где $\{\zeta_k\}$ — последовательность всех нулей характеристической функции; $\mathrm{Conv}_{[\chi]}(\Omega)$ — наименьшая выпуклая в направлениях из $[\chi]$ область, содержащая Ω.

Теорема 1. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$ *— произвольное множество,* $\chi(z)$ *— отличная от константы функция из класса* $[1,0]$. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) $LH(Q) \supset H(Q)$;

(2) *для любой* $\Omega_2 \in \mathscr{U}(Q)$ *существует* $\Omega_1 \in \mathscr{U}(Q)$ *такая, что* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *и* $LH(\Omega_1) \supset H(\Omega_2)$;

(3) *для любой* $\Omega_2 \in \mathscr{U}(Q)$ *существует* $\Omega_1 \in \mathscr{U}(Q)$ *такая, что* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *и для любой связной компоненты* Ω_c *множества* Ω_1 *выполняется* $\mathrm{Conv}_{[\chi]}(\Omega_c) \subset \Omega_2$.

Не останавливаясь на простых импликациях (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1), кратко изложим оригинальную часть доказательства (1) $\Rightarrow$ (3).

Пусть $\Omega_2 \in \mathscr{U}(Q)$. Обозначим $B = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетное плотное в $[\chi]$ множество, Γ_k — совокупность простых ломаных γ^k с вершинами в точках вида $(p+iq)\cdot\beta_k$ (здесь p, $q \in \mathbb{Q}$, $\beta_k \in B$), лежащих в Ω_2 и таких, что функция $\mathrm{Re}\,\frac{z}{\beta_k}$ принимает на концах ломаной равные значения, большие значений в других точках этой ломаной. Пусть $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = \{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$. Тогда $k = k(s)$ — натуральное число, при котором $\gamma_s \in \Gamma_{k(s)}$. Обозначим M_s многоугольник, ограниченный ломаной γ_s и выпуклой оболочкой I_s^+ ее концов; $I_s^- = [b_s^-, e_s^-]$— выпуклая оболочка точек множества $(M_s \backslash \Omega_2)$, на которых функция $\mathrm{Re}\,\frac{z}{\beta_{k(s)}}$ принимает минимальное значение.

Убрав из рассмотрения кривые γ_s, для которых $M_s \setminus \Omega_2 = \varnothing$, перенумеруем множество Γ заново. Для каждого направления $\beta_k \in B$ обозначим через A^k такую подпоследовательность нулей a_n^k функции χ, что $\frac{\overline{a_n^k}}{|a_n^k|} \to \beta_k$ при $n \to \infty$.

Возьмем $(\gamma_1, \beta_{k(1)}) \in \Gamma \times B$ и одну из полуплоскостей $\mathrm{Im}\,\frac{z}{\beta_{k(1)}} \geqslant 0$ или $\mathrm{Im}\,\frac{z}{\beta_{k(1)}} \leqslant 0$, в которой лежит бесконечное число точек последовательности $A^{k(1)}$, обозначим эту подпоследовательность тем же символом. Положим σ_1 равным b_1^- или e_1^- так, чтобы $|e^{-\sigma_1\zeta}| = \max\{|e^{-b_1^-\zeta}|, |e^{-e_1^-\zeta}|\}$ для $\zeta \in A^{k(1)}$; пусть $f_1 = \frac{c_1}{z-\sigma_1}$, $c_1 = 1$. Для $(\gamma_s, \beta_{k(s)})$ выбор точки σ_s проводится аналогично выбору σ_1, только в обозначениях индекс “1” заменяется на s. Положим

$$c_s = \min\{2^{-s}, \inf_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s-1,\\ m \in \mathbb{N}}} 2^{-s}|c_i \cdot e^{(\sigma_s - \sigma_i)a_m^{k(i)}}|\}.$$

Обозначим $\mathfrak{B}[\cdot]$ преобразование Бореля функций, голоморфных вне компактного множества и равных нулю на бесконечности. Если многоугольник M_s не содержит точек σ_j, $j < s$ или

$$\Bigl|\sum_{\sigma_j \in M_s,\, j \leqslant s} \mathfrak{B}[f_j]\Bigr| > |\mathfrak{B}[f_s]|. \tag{*}$$

на всех точках последовательности $(-A^{k(s)})$, то оставляем $f_s = \frac{c_k}{z-\sigma_s}$ и переходим к следующей паре $(\gamma_{s+1}, \beta_{k(s+1)})$. Если неравенство нарушается на конечном числе точек последовательности $(-A^{k(s)})$, мы их выбрасываем из рассмотрения, иначе f_s полагаем равной $\left(-\frac{c_s}{z-\sigma_s}\right)$. После того, как функции f_s построены для всех $s \in \mathbb{N}$, положим $f(z) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} f_s$. Тем самым для любого $s \in \mathbb{N}$ существует такая последовательность $A^{k(s)}$ нулей $a_m^{k(s)}$ функции χ, что $\frac{\overline{a_m^{k(s)}}}{|a_m^{k(s)}|} \to \beta_{k(s)}$ при $m \to \infty$ и на последовательности $(-A^{k(s)})$ выполняется неравенство (*).

Обозначим $y \in H(Q)$, $\Omega_1 \subset \mathscr{U}(Q)$ такие, что $y \in H(\Omega_1)$ и $Ly = f$. Без ограничения общности можно считать $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Дальнейшие рассуждения проводятся по адаптированной схеме Ю.Ф. Коробейника.

Предположим, что условие (3) не выполнено, т.е. $\mathrm{Conv}_{[\chi]}(\Omega_c) \setminus \Omega_2 \neq \varnothing$ для некоторой связной компоненты Ω_c множества Ω_1. Можно показать, что $\mathrm{Conv}_\beta(\Omega_c) \setminus \Omega_2 \neq \varnothing$ при некотором $\beta = \beta_{k(s)} \in B$. Для последовательности $A^{k(s)}$ из (*) имеем

$$\sum_{j \leqslant s,\, \sigma_j \in M_s} \mathfrak{B}[f_j(-a_m^{k(s)})] = -(\mathfrak{B}[\psi_1(-a_m^{k(s)})] + \sum_{j > s,\, \sigma_j \in M_s} \mathfrak{B}[f_j(-a_m^{k(s)})]) \tag{**}$$

где $\psi_1(\zeta)$ — аналитическая вне сегмента I_s^+ функция.

С помощью неравенства треугольника из (**) получаем

$$\Bigl|\sum_{j \leqslant s, \sigma_j \in M_s} \mathfrak{B}[f_j(-a_m^{k(s)})]\Bigr| \leqslant \Bigl|\mathfrak{B}[\psi_1(-a_m^{k(s)})]\Bigr| + \frac{1}{2^s} \cdot |c_s| \cdot |e^{-\sigma_s a_m^{k(s)}}|.$$

Величина первого слагаемого $\mathfrak{B}[\psi_1(-a_m^{k(s)})]$ при $|a_m^{k(s)}| \to \infty$ экспоненциально убывает по сравнению с $e^{-\sigma_s a_m^{k(s)}}$, что противоречит (*).

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99–01–00951).

Список литературы

[1] Köthe G. // J. reine und amgew. Math. 1953. V. 191. P. 30–49.

[2] Коробейник Ю. Ф. // Мат. сб. 1969. Т. 80. №1. С. 52–76.

[3] Martineau A. Équations différentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math. France. 1967. V. 95. №2. P. 109–154.

[4] Знаменский С. В. Об областях существования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Препринт ИФСО-3М. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР. С. 17.

[5] Знаменский С. В. Деп. в ВИНИТИ, №3063-80 1980. С. 89.

[6] Коробейник Ю. Ф. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №2. С. 74–83.

[7] Напалков В.В., Рудаков И.А. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №3. С. 57–65.

[8] Мальцев И. М. // Докл. РАН. 1994. Т. 336. №3. С. 297–300.

[9] Мальцев И. М. // Изв. вузов. Математика. 1994. №7. С. 49–58.

[10] Мальцев И. М. // Изв. вузов. Математика. 1994. №11. С. 43–52.

[11] Знаменский С.В., Козловская Е.А. // Докл. РАН. 1999. Т. 368. №6. С. 737–739.