Семь задач $\mathbb{C}$-выпуклости

С. В. Знаменский *

В работе сформулированы семь наиболее трудных задач теории линейчатой выпуклости и $\mathbb{C}$-выпуклости, которые оказывают достаточно сильное влияние на интенсивность исследований в этой области, но, по-видимому, не будут решены в обозримом будущем.

1. Условие линейчатой выпуклости для областей с гладкой границей. Насколько мне известно, Беенке и Пешль были первыми математиками, которые, для получения комплексного аналога выпуклости, применили весьма естественную идею. Суть идеи заключалась в замене вещественной опорной гиперплоскости в определении выпуклости комплексной гиперплоскостью [1]. Они называли область $D = \{ z : \varphi(z) < 0 \} \subset \mathbb{CP}^2$, определенную с помощью дважды непрерывно дифференцируемой функции φ, *"planarkonvex im großen"*, если для любой точки $z \in \partial D$ существует гиперплоскость h такая, что $z \in h$ и $h \cap D = \varnothing$, и *"planarkonvex im kleinen"*, если для каждой точки $z \in \partial D$ существуют окрестность U и гиперплоскость h такие, что $z \in h$ и $h \cap D \cap U = \varnothing$. Мы будем называть эти области глобально и локально *слабо линейчато выпуклыми* соответственно.

Установившаяся в статьях на русском языке терминология к сожалению не вполне соответствует ни западной терминологии, ни логике предмета. Например, слово "линейная" всегда ассоциируется с линейной структурой пространства, "линейная выпуклость" связана не с линейной, а с проективной структурой. Для удобства читателей приведем таблицу соответствия терминов:

Устаревшие термины	**Корректные аналоги**
Линейная выпуклость по Мартино	Линейчатая выпуклость
Линейная выпуклость	Слабая линейчатая выпуклость
Сильная линейная выпуклость	$\mathbb{C}$-выпуклость

Беенке и Пешль рассматривали два определителя Леви:

$$L(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_{\overline{w}} & \varphi_{w\overline{w}} & \varphi_{z\overline{w}} \\ \varphi_{\overline{z}} & \varphi_{w\overline{z}} & \varphi_{z\overline{z}} \end{vmatrix}, \qquad M(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_w & \varphi_z \\ \varphi_w & \varphi_{ww} & \varphi_{zw} \\ \varphi_z & \varphi_{wz} & \varphi_{zz} \end{vmatrix}$$

и установили, что условие

$$L(\varphi) \geqslant |M(\varphi)| \tag{1}$$

в точке на границе области ∂D необходимо для локальной слабой линейчатой выпуклости и условие

$$L(\varphi) > |M(\varphi)| \tag{2}$$

во всех точка границы ∂D достаточно для глобальной слабой линейчатой выпуклости. Перечисленные выше условия слабой линейчатой выпуклости были обобщены на случай n переменных в [2]. В этой работе (1) и (2) были заменены следующими условиями: сужение гессиана

$$H(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 \varphi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k$$

на комплексную касательную гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \varphi(z^0)}{\partial z_j} w_j = 0$$

*Работа выполнена при поддержке Фонда Фундаментальных исследований, грант №

неотрицательно (соответственно, положительно). Эквивалентность глобальной слабой линейчатой выпуклости и локальной слабой линейчатой выпуклости в каждой точке была доказана для ограниченной области с гладкой границей ($\varphi \in C^1(\partial D)$) в [3]. Случай неограниченных областей изучался в [4].

Следующая задача рассматривалась рядом Красноярских математиков на протяжении 60-х и 70-х годов, но так и не была решена, кроме этого, о ней никогда не упоминалось в публикациях.

Задача 1. *Является ли условие* (1) *для всех точек границы ∂D достаточным для слабой линейчатой выпуклости области D?*

Если ответ на этот вопрос положителен, то условие (1) эквивалентно глобальной слабой линейчатой выпуклости.

Исследования слабой линейчатой выпуклости захлестнули неожиданные проблемы. Даже построение ограниченной слабо линейчато выпуклой области с гладкой границе, которая не является выпуклой областью, было очень трудной задачей [5–7].

2. Аппроксимация областями с гладкими границами. Поразительным явился тот факт, что существует слабо линейчато выпуклая область, которую нельзя аппроксимировать областями с гладкими границами [5]. В [3] можно найти объяснение этого факта: сечение ограниченной слабо линейчато выпуклой области с гладкой границей комплексной прямой всегда связно и односвязно и область гомеоморфна шару. Области, сечения которых комплексными прямыми связны и односвязны, сейчас называются $\mathbb{C}$-выпуклыми [8]. Легко показать, что объединение возрастающей последовательности $\mathbb{C}$-выпуклых областей всегда $\mathbb{C}$-выпукло. Поэтому очевидно, что слабо линейчато выпуклое произведение кольца и круга не может быть аппроксимировано слабо линейчато выпуклыми областями с гладкими границами.

Следующая задача принадлежит Л. А. Айзенбергу [9].

Задача 2. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ ограниченная $\mathbb{C}$-выпуклая область. Всегда ли можно найти последовательность $D_1 \subset\subset D_2 \subset\subset \dots$ слабо линейчато выпуклых областей с границами класса C^2 таких, что $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$?*

Первоначально эта задача формулировалась без требования ограниченности. Сейчас известно, что существует неограниченная $\mathbb{C}$-выпуклая область, которую нельзя аппроксимировать в духе задачи 2 последовательностью ограниченных $\mathbb{C}$-выпуклых областей (детали см. в задаче 6).

Эта задача аппроксимации возникла из приложений линейчатой выпуклости к теории двойственности пространств голоморфных функций.

3. Теория двойственности пространств голоморфных функций. В 60-х годах пространства $H(E)$ всех голоморфных на открытом или компактном множестве $0 \in E \subset \mathbb{C}^n$ и их сопряженные пространства $H'(E)$ изучались А. Мартино и Л. А. Айзенбергом [10–13]. Они использовали преобразование Фантаппье, ставящее в соответствие аналитическому функционалу $T \in H'(E)$ голоморфную функцию σ_T, по следующему правилу

$$\sigma_T(\zeta) = T\left((1 - z_1\zeta_1 + \dots + z_n\zeta_n)^{-1}\right).$$

Они выяснили, что это соответствие устанавливает изоморфизм пространств $H'(E)$ и $H(\widetilde{E})$, где $\widetilde{E} = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \quad z_1\zeta_1 + \dots + z_n\zeta_n \neq 1 \ \text{ для всех } \ \zeta \in E\}$, если E выпуклое множество. Это множество $\widetilde{E}$ было названо сопряженным множеством.

Под влиянием работы Беенке и Пешля [1] и работ Л. А. Айзенберга, А. Мартино назвал множество E линейчато выпуклым, если сопряженное к $\widetilde{E}$ множество $\widetilde{\widetilde{E}}$ совпадает с E. Это означает, что для любой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E$ существует гиперплоскость $h \subset \mathbb{C}^n \setminus E$, проходящая через z. Первоначально А. Мартино предполагал, что преобразование Фантаппье осуществляет изоморфизм для любого линейчато выпуклого множества, но позднее он стал использовать термин сильно линейчато выпуклое (“fortement linéelement convexe”) множество в таких случаях. Область голоморфности $0 \in D \subset \mathbb{C}^n$ назовем *сильно линейчато выпуклой*, если преобразование Фантаппье σ осуществляет изоморфизм $H'(D)$ на $H(\widetilde{D})$. Требование на область D быть областью голоморфности нельзя отбросить, если хочется получить полное геометрическое описание. Например, пусть D — дополнение до открытого единичного шара U произвольного компакта, лежащего в этом шаре. Пространство $H(D)$ совпадает с пространством $H(U)$, но D может обладать довольно сложной геометрией. В то же время использование оболочки голоморфности для этой задачи дает возможность описания в простых геометрических терминах.

Теорема [13–16]. (*Геометрический критерий сильной линейчатой выпуклости*) *Область $D \subset \mathbb{C}^n$ сильно линейчато выпукла в том и только в том случае, если она $\mathbb{C}$-выпукла.*

Естественная идея заменить гиперплоскости алгебраическими многообразиями привела к нескольким обобщениям понятия линейчатой выпуклости [17–20]. Известные попытки получить аналог приведенной выше теоремы [20, 21] не дали желательного результата.

Задача 3. *Построить естественное обобщение сильной линейчатой выпуклости, заменяя гиперплоскости квадратичными многообразиями и получить геометрическое описание этого обобщения выпуклости.*

4. Голоморфные отображения и инвариантные метрики.

Задача 4. *Каждая ли ограниченная $\mathbb{C}$-выпуклая область биголоморфно эквивалентна подходящей выпуклой области?*

Эта задача была предложена Пфлюгом (P. Pflug) для того, чтобы решить задачу, касающуюся инвариантных метрик:

Задача 4′. *Пусть D ограниченная $\mathbb{C}$-выпуклая область. Всегда ли верен тот факт, что метрики Каратеодори и Кобаяси для D совпадают?*

Этот вопрос появился в работе [22], где был получен положительный ответ в случае выполнения условия (2) для всех точек границы (сильная линейчатая выпуклость). Даже в случае выпуклых областей решение задачи 4' весьма сложно [23]. Мы имеем косвенные свидетельства возрастания трудностей в общем случае, связанные с упоминавшимися выше трудностями построения примера $\mathbb{C}$-выпуклой области, с одной стороны, и существование $\mathbb{C}$-выпуклой области со сложной геометрической структурой такой, как ограниченная область с неспрямляемой границей [24], с другой.

5. Ну а где же $\mathbb{C}$-выпуклые функции?

Пространства голоморфных функций $H(D)$ обладают специфичными свойствами для $\mathbb{C}$-выпуклых областей точно также, как и классические пространства функций и распределений обладают специфичными свойствами в случае выпуклых областей. Одним из таких свойств является разрешимость неоднородного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами [25–28]. В [29, 30] можно найти, что для ограниченных областей такая разрешимость эквивалентна $\mathbb{C}$-выпуклости их оболочек голоморфности.

Перечислим несколько проблем, естественное решение которых также выражается в этих терминах: представление голоморфных функций рядами простейших дробей [31, 32], томография аналитических функционалов [33], комплексная интерполяция Кергина[8, 34] и задача разделения особенностей [11, 35]. Изоморфизм преобразования Фантаппье оказался пригодным при изучении уравнений в свертках и примыкающих к ним задачах [35].

Несмотря на то, что $\mathbb{C}$-выпуклость определена как естественный комплексный аналог выпуклости, она не унаследовала свойства, тесно связанные с естественной упорядоченностью поля вещественных чисел. Наиболее раздражающим фактом является то, что пересечение $\mathbb{C}$-выпуклых областей не обязательно будет $\mathbb{C}$-выпукло. Как следствие этого, нет точных аналогов выпуклой оболчки, выпуклой опорной функции и функционала Минковского для $\mathbb{C}$-выпуклости.

Отсутствие мощного инструмента, подобного выпуклым функциям, явилось стимулом для возникновение предложенной М. Пассаре задачи:

Задача 5. *Определить класс функций, который столь же тесно был бы связан с $\mathbb{C}$-выпуклостью, как класс выпуклых функций связан с выпуклостью.*

Конечно, эта задача становится более доступной, как только мы ограничиваем рассмотрение каким-то классом множеств. Класс $\mathbb{C}$-выпуклых компактов Гартогса с криволиней ным основанием был рассмотрен в [36] в терминах выпуклых на кривой функций. На немногих кривых существуют положительные выпуклые функции. Каждая из таких кривых

M является гладкой и *спирально связной* в следующем смысле: содержащая a компонента множества

$$\left\{ z \in M : \left| \frac{z-a}{z-b} \right| \leqslant t \right\}$$

пересекается с содержащей b компонентой множества

$$\left\{ z \in M : \left| \frac{z-a}{z-b} \right| \geqslant t \right\}$$

для любого $t \in \mathbb{R}_+$, $a, b \in M$.

6. Образы и прообразы при дробно линейных преобразованиях. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}$-выпуклая область. Она имеет *структурную размерность* k, $0 \leqslant k \leqslant n$, если D линейно изоморфна $\widetilde{D} \times \mathbb{C}^{n-k}$, где D — подходящая область и k — минимальное возможное число. Любая ограниченная $\mathbb{C}$-выпуклая область имеет структурную размерность $k = n$.

Доказательство следующей теоремы опубликовано в [37]:

Теорема. *Пусть D $\mathbb{C}$-выпуклая область структурной размерности $k > 1$ и $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ невырожденные проективные (дробно линейные) отображения. Тогда $\varphi(D)$ и $\psi^{-1}(D)$ спирально связны.*

Очевидно, что $\mathbb{C}$-выпуклая область структурной размерности 1 может иметь не спирально связные проекции и, следовательно, может не иметь аппроксимирующую последовательность ограниченных $\mathbb{C}$-выпуклых областей.

Задача 6. *Дать полное описание всех возможных образов и прообразов $\mathbb{C}$-выпуклых областей фиксированной структурной размерности при проективных отображениях.*

7. Комплексная проективная выпуклость. Область $D \subset \mathbb{CP}^n$ называется проективно выпуклой, если $D \cap l$ связно и односвязно для любой прямой $l \subset \mathbb{CP}^n$. Компакт $K \subset \mathbb{CP}^n$ называется проективно выпуклым, если область $\mathbb{CP}^n \setminus K$ проективно выпукла. Максимальная размерность плоскости, содержащейся в проективно выпуклом множестве называется рангом множества. Проективно выпуклые множества ранга 0 в точности совпадают с $\mathbb{C}$-выпуклыми множествами и проективно выпуклые множества ранга $n-1$ в точности совпадают с дополнениями до $\mathbb{C}$-выпуклых множеств.

Комплексный аналог [38] опубликован в [39]:

Теорема. *Проективно выпуклая область $D \subset \mathbb{CP}^n$ ранга k гомеоморфна множеству*

$$\{ (z_0, \dots, z_n) : |z_0|^2 + \dots + |z_k|^2 > |z_{k+1}|^2 + \dots + |z_n|^2 \}.$$

Можно ли описать более точно проективно выпуклые множества ранга $0 < k < n-1$?

Задача 7. *Пусть $D \subset \mathbb{CP}^n$ проективно выпуклая область ранга $0 < k < n-1$. Существуют следующие возможности:*

(1) *в подходяших однородных координатах*

$$D = \{ (z_0, \dots, z_n) : |z_0|^2 + \dots + |z_k|^2 > |z_{k+1}|^2 + \dots + |z_n|^2 \}; \tag{3}$$

(2) *существует гиперплоскость, содержащая $\mathbb{CP}^n \setminus D$;*

(3) *существует дробно линейное отображение $\varphi : D \to \mathbb{CP}^{n-1}$ такое, что $D = \varphi^{-1}(G)$, где $G = \varphi(D) \subset \mathbb{CP}^{n-1}$.*

Имеют ли место другие возможности?

В вещественном случае других возможностей нет [40–42]. Этот вид геометрии области D позволяет строить преобразование Пенроуза, лежащего в основе теории твисторов [13, 43]. Поэтому положительный ответ на последнюю задачу вероятно мог бы открыть физикам путь для исследования альтернативных структур Вселенных.

Список литературы

[1] Behnke H., Peschl E. Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen // Math. Ann. 1935. V. 111. №2. P. 158–177.

[2] Зиновьев Б. С. Аналитические условия и некоторые вопросы аппроксимации линейно выпуклых областей с гладкими границами в пространстве $\mathbb{C}^n$ // Известия Вузов. Математика. 1971. №6. P. 61–69.

[3] Южаков А. П., Кривоколеско В. П. Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. матем. журн. 1971. №2. P. 452–458.

[4] Зелинский Ю. Б. О линейно выпуклых областях с гладкими границами // Укр. мат. журн. 1988. V. 40. №1. P. 53–58.

[5] Айзенберг Л. А., Южаков А. П., Макарова Л. Я. О линейной выпуклости в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. матем. журн. 1968. V. 9. №4. P. 731–746.

[6] Даутов Ш. А., Степаненко В. А. Простой пример ограниченной линейно выпуклой, но невыпуклой области с гладкой границей // Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск: Ин-т физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1972. P. 175–179.

[7] Степаненко В. А. Об одном примере ограниченной линейно выпуклой, но невыпуклой области с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск: Ин-т физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1976. P. 200–202.

[8] Andersson M., Passare M. Complex Kergin interpolation // J. Approxim. Theory. 1991. V. 64. №2. P. 214–225.

[9] Айзенберг Л. А. Линейные функционалы в пространствах аналитических функций и линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ // Исследования по линейным операторам и теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. Записки научных семинаров ЛОМИ. V. 81. Л.: Наука, 1978. P. 29–32.

[10] Айзенберг Л. А. Общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве функций, голоморфных в выпуклых областях $\mathbb{C}^n$ // Докл. АН СССР. 1966. V. 166. P. 1015–1018.

[11] Айзенберг Л. А. Линейная выпуклость в $\mathbb{C}^n$ и разделение особенностей голоморфных функций // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. 1967. V. 15. №7. P. 487–495.

[12] Martineau A. Equations différentielles d'ordre infini // Bull. Soc. Math. de France. 1967. V. 95. P. 109–154.

[13] Гиндикин С. Г., Хенкин Г. М. Интегральная геометрия для ∂-когомологий в q-линейно вогнутых областях в $\mathbb{CP}^n$ // Функц. анализ и его прилож. 1978. V. 12. №4. P. 6–23.

[14] Знаменский С. В. Геометрический критерий сильной линейной выпуклости // Функц. анализ и его прилож. 1979. V. 13. №3. P. 83–84.

[15] Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость. I. Двойственность пространств голоморфных функций // Сиб. матем. журн. 1985. V. 26. №3. P. 31–43.

[16] Andersson M. Cauchy-Fantappiè-Leray formulas with local sections and the inverse Fantappiè transform // Bull. Soc. math. France. 1992. V. 120. P. 113–128.

[17] Степаненко В. А. Об обобщении понятия линейной выпуклости и его приложениях // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск: Ин-т физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР, 1973. P. 123–137.

[18] Симонженков С. Д. Об одном обобщении понятия сильной линейной выпуклости // Известия Вузов. Математика. 1974. №5. P. 142–144.

[19] Елин М. М. Об одном виде выпуклости в многомерном комплексном анализе // Сиб. мат. журн. 1992. V. 33. №5. P. 214.

[20] Boo J. Quadratic Convexity // Preprint No 1993-16/ISSN0347-2809. Göteborg, 1993. P. 1–22.

[21] Симонженков С. Д. Об описании сопряженного пространства к пространству функций, голоморфных в области одного специального вида // Сиб. мат. журн. 1981. V. 22. №2. P. 218–221.

[22] Lempert L. Intrinsic distances and holomorphic retracts // Complex analysis and applications' 81. Sofia: Bulg. Acad. Sci, 1984. P. 341–364.

[23] Pflug P.,...., 1994.

[24] Знаменский С. В. Пример сильно линейно выпуклой области с неспрямляемой границей // Матем. заметки 1994. V. 57. №6. P. 851–861.

[25] Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier. 1955–1956. №6. P. 271–355.

[26] Malgrange B. Sistemes différentielles á coefficients constants // Séminaire Bourbaki. №246. Paris, 1962/63.

[27] Malgrange B. Sur la propagation de la régularité des solutions des équations á coefficients constants // Bull. Math. Soc. Math. Phis. R.P.R. 1959. V. 3(35). №4. P. 433–440.

[28] Neymark H. On the existence of solutions of differential equations with constant coefficients // Arkiv för Math. 1965. V. 5. P. 433–443.

[29] Martineau A. Sur la notion d'ensemble fortement linéelement convexe // Anais. Acad. Brasil. Ciènc. 1968. V. 4. №4. P. 427–435.

[30] Знаменскмй С. В. О существовании голоморфных первообразных по всем направлениям // Матем. заметки. 1989. V. 45. №1. P. 16–19.

[31] Айзенберг Л. А. О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби // Сиб. матем. журн. 1967. V. 8. №5. P. 1124–1142.

[32] Трутнев В. М. О свойствах функций, голоморфных на сильно-линейно выпуклых множествах // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск: Ин-т физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР, 1973. P. 139–155.

[33] Знаменский С. В. Томография в пространствах аналитических функционалов // Докл. АН СССР 1990. V. 312. №5. P. 1037–1040.

[34] Andersson M., Passare M. Complex Kergin interpolation and Fantappiè transform // Mathematische Zeitschrift. 1991. V. 208. P. 257-271.

[35] Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость. II. Существование голоморфных решений линейных систем уравнений // Сиб. матем. журн. 1988. V. 29. №6. P. 49–65.

[36] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н. Условия сильной линейной выпуклости для компактов Гартогса с криволинейным основанием // Известия Вузов. Математика. 1984. №12. P. 32–35.

[37] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н. Спиральная связность сечений и проекций $\mathbb{C}$-выпуклых множеств // Мат. заметки. V. 59. №3. P. 359–369.

[38] Bracho J., Calvillo G. Homotopy classification of projective convex sets // Geom. Dedicata. 1991. V. 37. №3. P. 303–306.

[39] Знаменский С. В., Знаменская Л. Н. Комплексная проективная выпуклость // Сиб. матем. журн..

[40] Kneser H. Eine Erweiterung des Begriffes "konvexer Körper" // Math. Ann. 1921. V. 82. P. 287–296.

[41] Marchaud A. Convexité et connexité lineare // C. R. ac. sci. 1959. V. 248. №20. P. 2843–2844.

[42] Marchaud A. Convexité et connexité lineare // C. R. ac. sci. 1959. V. 249. №21. P. 2141–2143.

[43] Гиндикин С. Г., Хенкин Г. М. Преобразование Пенроуза и комплексная интегральная геометрия // Современные проблемы математики. V. 17. М.: ВИНИТИ, 1981. P. 57–111.