# Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве функций, аналитических на произвольном множестве в $\mathbb{C}$

**С. В. Знаменский, Е. А. Знаменская**

Пусть $M \subset \mathbb{C}$ — произвольное множество, $f(z)$ принадлежит пространству $H(M)$ голоморфных в $M$ функций, $U(M)$ совокупность всех открытых множеств, содержащих $M$; обозначим $L = \chi(D) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi_k D^k$ — линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и будем рассматривать его в предположении, что характеристическая функция $\chi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi_k z^k$ принадлежит классу $[1, 0]$, т.е. является целой функцией роста не выше первого порядка минимального типа; $\mathrm{Dir}_{\mathrm{conv}}(M)$ — множество направлений единичной окружности, являющихся направлениями выпуклости для $M$; $[\chi] = \overline{\{\frac{a_k}{|a_k|}\}}$, где $a_k$ — предельные точки последовательности нулей характеристической функции $\chi(z)$.

Будем говорить, что уравнение $Ly = f$ *разрешимо* в $H(Q)$ при $f \in H(Q)$, если существует открытое множество $D \supset Q$ и функция $y \in H(Q)$ такая, что $L[y|_{D_\alpha}] = f|_{D_\alpha}$ по всем связным компонентам $D_\alpha$ множества $D$. Так как для произвольного множества $M \subset \mathbb{C}$ разрешимость уравнения $(*)$ эквивалентна существованию решения в как угодно малой окрестности $M$ (для разных правых частей $f \in H(M)$ окрестности могут быть различны), то решение поставленной задачи сводится к решению следующей: для произвольной окрестности $U \supset M$ $(f \in H(M))$ построить окрестность $V \supset M$ такую, что $U \supset V$ и уравнение $(*)$ разрешимо в $H(V)$.

Пример множества

$$M = \{0\} \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0,1} [(-1)^k 2^{-n}(1-2i), (-1)^k 2^{-n-2}(1-4i)] \right)$$

показывает, что способ построения требуемой окрестности, используемый в случае связных множеств [1], в случае несвязных множеств неприменим. Отметим, что $M$ удовлетворяет условиям

(1) $M$ выпукло во всех направлениях и каждая его связная компонента выпукла;

(2) в $H(Q)$ разрешимо уравнение $Ly = f$ с любой правой частью $f$ из $H(Q)$, для которого множество $[\chi]$ характеристической функции $a(z)$ оператора $L$ состоит из точки $-i$,

(3) существует окрестность $U$ множества $Q$, не содержащая ни одной выпуклой в направлении $-i$ односвязной окрестности этого множества.

Для краткости записи под выражением $L(H(\Omega_1)) \supset H(\Omega_2)$ будем понимать следующее: каждая функция из $H(\Omega_2)$ является прообразом некоторой функции из $H(\Omega_1)$ при действии оператора $L$.

**Теорема 1** *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — произвольное множество, $a(z)$ — отличная от константы функция из класса $[1, 0]$. Следующие условия эквивалентны:*

*(1) $L(H(Q)) \supset H(Q)$;*

*(2) для любой $\Omega_2 \in U(M)$ существует $\Omega_1 \in U(M)$ такая, что $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и $L(H(\Omega_1)) \supset H(\Omega_2)$;*

*(3) для любой $\Omega_2 \in U(M)$ существует $\Omega_1 \in U(M)$ такая, что $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и для любой связной компоненты $\Omega_c$ множества $\Omega_1$ выполняется $\mathrm{Conv}_{[\chi]}(\Omega_c) \subset \Omega_2$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 99-01-00951.

**Список литературы**

[1] Знаменский С.В., Козловская Е.А. Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве функций, голоморфных на связном множестве. Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 1998. С.98–100.