Взаимосвязь некоторых условий выпуклости в направлении для ограниченных базисно односвязных множеств в $\mathbb{C}$

Е. А. Знаменская, С. В. Знаменский

Следуя [1], будем называть связное множество $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ *базисно односвязным*(б.о.), если для любой окрестности множества Q существует содержащаяся в ней односвязная область, также являющаяся окрестностью Q. В частности, для открытого множества базисная односвязность эквивалентна односвязности области. Также напомним, что множество $Q \subset \mathbb{C}$ называется выпуклым в направлении $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ является полуконтинуумом. В [2], в частности, было показано, что выпуклое в направлении β ограниченное базисно односвязное множество Q удовлетворяет условиям

(c) для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ связно;

(s) для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;

(c′) для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ связно;

(s′) для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ полуконтинуум,

причем условия (c′) и (s′) равносильны между собой, а условие (c) тривиально следует из условия (s).

В терминах выпуклости в направлении формулируются условия эпиморфности оператора свертки, в том числе условия разрешимости линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах функций, голоморфных на множествах в $\mathbb{C}$. В настоящее время существует несколько определений выпуклости в направлении, используемых различными авторами: например, условие (c′) используется в качестве определения выпуклости в направлении для областей и связных компактов. В связи с этим естественно возникает вопрос о равносильности указанных определений для множеств, не являющихся априори областями или компактами.

Оказывается, что для ограниченных базисно односвязных множеств перечисленные условия равносильны, являются необходимыми для выпуклости в направлении, но недостаточными.

Согласно [2] на множестве $Q \times Q \times \overline{\mathbb{C}} \setminus Q \times \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ существует непрерывная однозначная ветвь $A(w, z, \zeta, \eta)$ функции $\arg \frac{(w-\zeta)}{(w-\eta)} \frac{(z-\eta)}{(z-\zeta)}$. Будем говорить, что Q *удовлетворяет условию* ($\tilde{\mathrm{c}}$), если во всех точках (q_1, q_2, z_1, z_2) множества $Q \times Q \times \overline{\mathbb{C}} \setminus Q \times \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ таких, что $\min\limits_{i=1,2} \operatorname{Re} q_i > \max\limits_{i=1,2, z_i \neq \infty} \operatorname{Re} z_i$, справедливо неравенство $|A(q_1, q_2, z_1, z_2)| < \pi$.

Лемма 1 *Пусть $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ базисно односвязно, $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ — открытая или замкнутая полуплоскость (круг), причем $U \setminus Q$ связно. Тогда во всех точках (q_1', q_2', z_1', z_2') множества $Q \setminus U \times Q \setminus U \times U \setminus Q \times U \setminus Q$ выполняется неравенство $|A(q_1', q_2', z_1', z_2')| < \pi$.*

Лемма 2 *Пусть $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ базисно односвязно, причем либо Q, либо $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ ограничено. Тогда для Q справедлива импликация* ($\tilde{\mathrm{c}}$) $\Rightarrow$ (c$'$).

Применяя лемму 1 к множеству $Q' = \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ и полуплоскости $U = \alpha + \mathbb{C}_+$, получаем, что для базисно односвязного множества Q выполняется импликация (c$'$)$\Rightarrow$($\tilde{\mathrm{c}}$). Импликация (c)$\Rightarrow$($\tilde{\mathrm{c}}$) получается для ограниченных базисно односвязных множеств применением этой же леммы к множеству Q и полуплоскости $U = \alpha - \mathbb{C}_+$. Из леммы 2 вытекает, что для ограниченных базисно односвязных множеств выполняется импликация ($\tilde{\mathrm{c}}$)$\Rightarrow$(c). Доказательство импликации (c)$\Rightarrow$(s) состоит в непосредственном построении требуемого континуума и использует следующее утверждение:

Лемма 3 *Пусть A — ветвь функции $\arg z$ на произвольном множестве $Q \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, принимающая значения в интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда существуют односвязное открытое множество $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, содержащее Q, и ветвь A_1 функции $\arg z$, продолжающая на Ω функцию A.*

Для множества $M = \{\, x + iy : -1 < x \leqslant 0, |y| < 1, x + iy \neq 0 \,\}$ и $\beta = 1$ условия (c), (s), (c$'$), (s$'$) не влекут выпуклость M в рассматриваемом направлении.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 99-01-00951.

Список литературы

[1] Мальцев И. М. Эпиморфность оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах. Докл. РАН, 1994. т.336. вып.3. С. 297–300
[2] Е.А. Козловская. Выпуклость в заданном направлении базисно односвязных множеств комплексной плоскости. Современные проблемы математики и информатики. Вып.2. Ярославль. 1999. с.53-60.