УДК 517.983

ВЫПУКЛОСТЬ В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ БАЗИСНО ОДНОСВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ[1]

Е.А. Знаменская

CONVEXITY IN SOME DIRECTION OF BASIC SIMPLY CONNECTED SET IN THE COMPLEX PLANE

E.A. Znamenskaya

Аннотация

Условия базисной односвязности множества и его выпуклости в подходящих направлениях являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. В работе исследуется эквивалентность возможных определений выпуклости в направлении в классе базисно односвязных множеств комплексной плоскости.

Abstract

The following geometrical conditions are necessary and sufficient for infinite order ODE with constant coefficients solvability: the basical simply connectedness and the convexity in directions. We prove several definitions for convexity in a direction to be equivalent for any basical simply connected set.

Естественным обобщением понятия выпуклости для множеств на плоскости является понятие выпуклости в заданном направлении. Основное внимание в работах последних лет [1, 2], связанных с выпуклостью в направлении, было направлено на установление соответствующих свойств и критериев для множеств, являющихся областями. Это объясняется их особой значимостью в теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

Необходимость выпуклости области для разрешимости уравнения $Ly = f$, где L—линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка, была показана Ю.Ф. Коробейником [3] (теорема 4.1). Доказательство этой теоремы основывается на отсутствии выпуклости в некотором направлении. Это не случайно. Предложение 2 из [2] утверждает, что уравнение бесконечного порядка, разрешимое в пространстве функций, голоморфных в области D и имеющее вид $Ly = f$, существует тогда и только тогда, когда область D выпукла в каком-либо направлении.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований грант № 99-01-00951

Связь разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка с выпуклостью в направлении компактных множеств была описана в [4]. Дальнейшее развитие теории потребовало рассматривать вопросы выпуклости в направлении для множеств, не являющихся областями или компактами [3, 4, 5]. При этом выяснилось ([6]), что в случае произвольных множеств условия разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами не могут быть сформулированы только в терминах выпуклости в направлении. А именно, на множество накладывается дополнительное условие базисной односвязности ([5–8]).

Следуя [5], будем называть связное множество $Q \subset \mathbb{C}$ *базисно односвязным*, если для любого открытого множества $U \supset Q$ существует содержащаяся в нем односвязная область V, содержащая Q. В частности, для открытого множества базисная односвязность эквивалентна односвязности области, компакт базисно односвязен только если он ацикличен.

Будем обозначать $\mathbb{C}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ и $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant 0 \,\} \cup \{\infty\}$, для произвольных множества $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек α, $\beta \in \mathbb{C}$ мы будем использовать обозначение $\alpha \pm \beta Q = \{\, \alpha \pm \beta z : z \in Q \,\}$, где $\alpha \pm \beta\infty = \infty$, $\beta Q = \{\, 0 + \beta z : z \in Q \,\}$. Напомним, что *полуконтинуум* это такое множество, любые две точки которого можно соединить связным компактным подмножеством. Объединение всех континуумов, содержащих данную точку p, называется *конституантой* этой точки.

Лемма 1 *Пусть пересечение базисно односвязного множества $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ с замкнутой в $\overline{\mathbb{C}}$ правой полуплоскостью $\overline{\mathbb{C}}_+$ связно. Тогда множество $Q \cap \overline{\mathbb{C}}_+$ базисно односвязно.*

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность Ω множества $\overline{\mathbb{C}}_+ \cap Q$. Тогда множество $U = \Omega \cup \mathbb{C}_-$ будет окрестностью всего множества Q (здесь $\mathbb{C}_-$ — открытая левая полуплоскость). Так как Q — базисно односвязное множество, то существует односвязная область V, содержащая Q и содержащаяся в U. Пусть F — объединение ограниченных связных компонент дополнения множества $\Omega \cap V$ до полуплоскости $\mathbb{C}_-$. Но тогда связная компонента множества $V \setminus (\bigcup_{z \in F} \{\, z - t, t \in [0; \infty) \,\})$, содержащая $Q \cap \overline{\mathbb{C}}_+$, будет связной и односвязной окрестностью множества $\overline{\mathbb{C}}_+ \cap Q$, содержащейся в Ω.

Лемма 2 *Пусть D_1 и D_2 — односвязные области в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащие связное множество Q. Тогда существует односвязная область D, содержащая Q, такая, что ее граница, лежащая в правой полуплоскости, является подмножеством границы D_1, а граница, лежащая в левой полуплоскости — подмножеством границы D_2, т.е. $\partial D \cap \mathbb{C}_+ \subset \partial D_1$, $\partial D \cap \mathbb{C}_- \subset \partial D_2$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{\zeta \in \partial D_1 \cup \partial D_2 : \Re\zeta = 0\}$ точек пересечения границ областей D_1 и D_2 с мнимой осью. Из множества

$$(D_1 \cup D_2) \setminus ((D_2 \setminus D_1) \cap \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus ((D_1 \setminus D_2) \cap \overline{\mathbb{C}}_-)$$

удалим точки всех отрезков вида $[\zeta', \zeta'']$, где $\zeta', \zeta'' \in A$, и их выпуклая оболочка не содержит точек множества Q. К полученному множеству D' добавим ограниченные связные компоненты F дополнения $D_1 \cup D_2$ до $\overline{\mathbb{C}}$, обозначим $D'' = D' \cup F$, тогда связная компонента множества D'', содержащая Q, и есть требуемая окрестность D. Односвязность D следует из построения.

Лемма 3 *Пусть пересечение базисно односвязного множества $Q \subset \mathbb{C}$ с любой открытой правой полуплоскостью $\alpha + \mathbb{C}_+$ связно. Тогда множество $Q \cap \mathbb{C}_+$ также базисно односвязно.*

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность Ω множества $\mathbb{C}_+ \cap Q$. Через l_k будем обозначать границу полуплоскости $P_k = (d/2^k - \mathbb{C}_+)$, где $d > 0$ — некоторое фиксированное число.

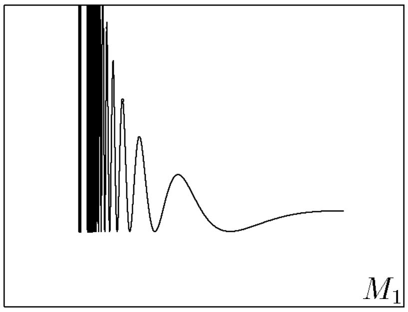
Выберем d так, чтобы прямая l_0 содержала точки множества Q.

Окрестность $P_0 \cup \Omega$ множества Q содержит односвязную подокрестность V_0, а в открытом множестве $P_1 \cup \Omega$, также содержащем Q, можно выбрать односвязную подобласть $U_0 \supset Q$. Применим лемму 2 к областям V_0, U_0 и прямой l_0. Полученную окрестность обозначим через V_1.

Далее, окрестность $P_2 \cup \Omega$ множества Q содержит односвязную область $U_1 \supset Q$, можно применить лемму 2 к областям V_1, U_1 и прямой l_1, результат обозначим через V_2 и т.д. На k-ом шаге имеем односвязную область V_k, содержащую Q, из окрестности $P_k \cup \Omega$ множества Q выбираем связную односвязную подокрестность U_k множества Q. Применяя лемму 2 к областям V_k, U_k и прямой l_k, получим односвязную область V_{k+1}, содержащую Q.

Для каждого k обозначим через D_k связную компоненту множества $V_k \cap (d/2^k + \mathbb{C}_+)$, содержащую $Q \cap (d/2^k + \mathbb{C}_+)$. Очевидно, что $D_k \subset D_{k+1}$, и объединение $\bigcup\limits_k D_k$ будет требуемой односвязной областью, содержащейся в Ω и содержащей множество $Q \cap \mathbb{C}_+$.

Отметим, что лемма 3 не может быть распространена на множества, содержащие бесконечно удаленную точку.



Невозможность такого распространения показывает пример множества

$$M_1 = \left\{ x + i\frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} : x \in (0,\, 3.5] \right\} \cup [0,\, +i\infty).$$

Лемма 4 [2] *Для базисной односвязности множества $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ необходимо и достаточно, чтобы на $Q \times Q \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q)$ существовала единственная непрерывная однозначная ветвь функции*

$$f(w, z, \zeta, \eta) = \ln\Big(\frac{w - \zeta}{w - \eta} \cdot \frac{z - \eta}{z - \zeta}\Big),$$

удовлетворяющая условию $f(w, w, \zeta, \zeta) = 0$.

Отсюда вытекает, что множество базисно односвязно вместе со своим дополнением до $\overline{\mathbb{C}}$. Следует отметить, что связь между базисной односвязностью множества и его дополнения до $\overline{\mathbb{C}}$ была замечена, по видимому, И.С. Шрайфелем ([9]).

Доказательство. Необходимость. Пусть $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ — базисно односвязное множество, $K \subset (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q)$ — произвольный компакт. Покажем, что на $Q \times Q \times K \times K$ существует единственная непрерывная ветвь функции $f(w, z, \zeta, \eta)$.

Рассмотрим сначала случай, когда Q открыто, т.е. является односвязной областью. Непрерывная ветвь задается формулой

$$f(w, z, \zeta, \eta) = \int_z^w \Big(\frac{1}{t - \zeta} - \frac{1}{t - \eta}\Big)\, dt,$$

где односвязность области гарантирует независимость интеграла от выбора пути интегрирования. Очевидно, что $f \equiv 0$ при $w = z$, а также при $\zeta = \eta$.

Пусть теперь K — компакт в дополнении к произвольному базисно односвязному множеству $Q \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$. Тогда найдется односвязная область $D \supset Q$, $D \cap K = \varnothing$ и по доказанному выше (для односвязных областей) на множестве $D \times D \times K \times K$ существует непрерывная ветвь функции f. Отсюда из связности Q следует единственность выбранной ветви на $Q \times Q \times K \times K$.

Для любых двух компактов K_1 и K_2, лежащих в дополнении к Q применение доказанного к K_1, K_2 и $K_1 \cup K_2$ показывает независимость функции f от компакта, содержащего точки ζ и η. Следовательно, функция $f(w, z, \zeta, \eta)$ определена всюду на $Q \times Q \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q)$ и непрерывна на каждом из множеств $Q \times Q \times K \times K$ для любого компакта $K \subset (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q)$.

Для доказательства непрерывности функции f на всем множестве $Q \times Q \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q)$ рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $\{(w_k, z_k, \zeta_k, \eta_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset Q \times Q \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus Q)$ и положим $K = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\Omega \supset Q$ — произвольное открытое множество. Покажем, что для каждой точки $w \in Q$ существует такое $\delta > 0$, что f непрерывно продолжается в $(Q \cup U_\delta(w)) \times (Q \cup U_\delta(w)) \times K \times K$ (здесь и далее $U_\delta(w)$ — δ-окрестность точки w, $K = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$).

Для любых $(\zeta, \eta) \in K \times K$ в силу непрерывности f на $Q \times Q \times K \times K$ существует поликруговая окрестность $U_\delta(w, z, \zeta, \eta)$ радиуса $\delta = \delta(\zeta, \eta)$, в которой значения

[2] Результат получен совместно с С. В. Знаменским

функции отличаются не больше, чем на 1. Компактность $K \times K$ позволяет выбрать δ не зависящим от ζ и η. Полученное $\delta = \delta(w)$ и будет искомым.

Определим $D_1 = \bigcup_{w \in Q} \{z : ||z - w|| < \frac{1}{2}\delta(w)\}$. Добавив к D_1 связные компоненты дополнения, не содержащие точек K, получим область $D \supset Q$.

Предположим, что существуют две связные компоненты дополнения D до $\overline{\mathbb{C}}$, каждая из этих компонент содержит точку из K. Обозначим точки через ζ и η. Тогда на множестве $Q \times Q$ существует однозначная ветвь функции $f(w, z, \zeta, \eta)$, покажем, что она однозначно продолжается на D.

Пусть $w \in D$, возьмем в Q точки w_1 и w_2 такие, что $w \in U_{\delta/2}(w_1) \cap U_{\delta/2}(w_2)$. Следовательно, точка $w_1 \in U_\delta(w_2)$ и по определению $\delta = \delta(w)$ продолжения из w_1 и w_2 в w совпадают и существующая ветвь единственна, что противоречит существованию замкнутого контура, разделяющего точки ζ и η. Односвязность области D доказана.

Введем обозначения

(a) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ линейно связно;

(c) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ связно;

(s) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;

($\overline{\mathrm{a}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ линейно связно;

($\overline{\mathrm{c}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ связно;

($\overline{\mathrm{s}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;

(a$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ линейно связно;

(c$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ связно;

(s$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ полуконтинуум;

($\overline{\mathrm{a}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ линейно связно;

($\overline{\mathrm{c}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ связно;

($\overline{\mathrm{s}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ полуконтинуум.

Из базисной односвязности множества следует полуконтинуальность самого множества и его дополнения до $\overline{\mathbb{C}}$, поэтому применение леммы 1 к множеству Q и полуплоскости $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+)$ доказывает справедливость импликации ($\overline{\mathrm{c}}'$)$\Rightarrow$($\overline{\mathrm{s}}'$). Согласно лемме 4 множество $Q' = \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ также базисно односвязно, поэтому ($\overline{\mathrm{c}}$)$\Rightarrow$($\overline{\mathrm{s}}$) следует из леммы 1, рассматриваемой для полуплоскости $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+)$. Импликация (c$'$)$\Rightarrow$(s$'$) следует из леммы 2.

Используя эти результаты, формулировку теоремы 1 из [10], являющуюся распространением теоремы 1 из [11] на случай ограниченных множеств, можно представить следующим образом:

Теорема 1 *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим следующую логическую диаграмму:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{a} \arrow[r, Leftrightarrow, dashed, "2\ \ 7"] \arrow[d, Leftrightarrow, "6"] & \overline{\mathrm{a}} \arrow[d, Leftrightarrow, "6"'] & & \overline{\mathrm{a}}' \arrow[r, Leftrightarrow, "5"] \arrow[d, Leftrightarrow, "5"] & \mathrm{a}' \arrow[d, Leftrightarrow, "5"'] \\
\mathrm{s} \arrow[r, Leftrightarrow, dashed, "2\ \ 7"] \arrow[d, Leftrightarrow, "6"] & \overline{\mathrm{s}} \arrow[d, Leftrightarrow, "1"'] \arrow[drr, Rightarrow, dashed] & & \overline{\mathrm{s}}' \arrow[r, Leftrightarrow, "4"] \arrow[d, Leftrightarrow, "1"] \arrow[dll, Rightarrow, dashed] & \mathrm{s}' \arrow[d, Leftrightarrow, "1"'] \\
\mathrm{c} \arrow[r, Leftrightarrow, dashed, "2\ \ 7"] & \overline{\mathrm{c}} & & \overline{\mathrm{c}}' \arrow[r, Leftrightarrow, "3"] & \mathrm{c}'
\end{tikzcd}$$

Тогда

1° *справедливы все импликации, указанные на диаграмме сплошными стрелками;*

2° *если Q связно, то $(\overline{\mathrm{s}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}}')$;*

3° *если связно $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$, то $(\overline{\mathrm{s}}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}})$;*

4° *если Q базисно односвязно, то выполняются импликации 1;*

5° *если Q ограничено, то имеют место импликации 2;*

6° *если Q открыто, то справедливы импликации 1 и $3-5$;*

7° *если Q открытое ограниченное множество, то $(c) \Rightarrow (\overline{c})$ и $(s) \Rightarrow (\overline{s})$;*

8° *если Q ограниченная область, то $(a) \Rightarrow (\overline{a})$;*

9° *если Q замкнуто, то имеют место импликации 3 и 6;*

10° *если Q компактно, то имеют место импликации $1-4$ и $6-7$;*

11° *если Q замкнутое множество со связным дополнением, то $(a') \Rightarrow (\overline{a}')$ и $(s') \Rightarrow (\overline{s}')$.*

Следствие 1 *Для базисно односвязного множества $Q \subset \mathbb{C}$ условия $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$ эквивалентны.*

Известные примеры ([11]) показывают, что сформулированная выше теорема содержит все имеющие место в данном контексте импликации.

Список литературы

[1] Знаменский С.В. *Об областях существования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами*//Препринт ИФСО-3М. Ин-т физики СО АН СССР. Красноярск. 1976.

[2] Знаменский С.В. *О разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций, теореме Леонтьева и формуле Вострецова*// Сиб. матем. журн. 1977. Т.18. N6. С. 1307–1320.

[3] Коробейник Ю.Ф. *Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности*// Мат. сб. 1969. Т. 80. N1. С. 52–76.

[4] Знаменский С.В. *Нетрадиционная выпуклость в направлении плоских областей и компактов и свойства голоморфных решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка*// Деп. в ВИНИТИ, N 3063-80 Деп. 1980.

[5] Мальцев И.М. *Эпиморфизм оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах*//Докл. РАН., 1994, Т.336, N3, С.297–300

[6] Мальцев И.М. *Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Достаточность.*//Изв. вузов. Математика. 1994. N11. С. 43–52.

[7] Мальцев И.М. *Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Необходимость.*//Изв. вузов. Математика. 1994. N7. С. 49–58.

[8] Знаменский С.В., Козловская Е.А.*Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве функций, голоморфных на связном множестве*// Тезисы докладов международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5-11 сентября 1998 г. Ростов-на-Дону. 1998. С. 98–100.

[9] Шрайфель И.С. *Об эквивалентности понятий базисной односвязности и квазиконтинуальности.*// Тезисы докладов международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5-11 сентября 1998 г. Ростов-на-Дону. 1998. С. 139–139.

[10] Козловская Е.А. *Условия выпуклости в заданном направлении ограниченных множеств*// Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98). Тезисы докладов. Новосибирск. 1998. С.74.

[11] Знаменский С.В., Знаменская Л.Н. *Выпуклость произвольных множеств на плоскости в заданном направлении*//Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Т.1. Комплексный анализ. 1996. Уфа. С. 30–40.