УДК 517.983

Существование аналитической на множестве первообразной

С. В. Знаменский, Е. А. Знаменская

Хорошо известно ([1, стр. 100, 2]), что существование голоморфных первообразных в области D эквивалентно односвязности D. Поэтому на открытом множестве голоморфная первообразная существует тогда и только тогда, когда каждая его связная компонента односвязна. В общем случае даже выпуклости компонент недостаточно для существования голоморфной первообразной (Пример 1).

Пусть M — произвольное множество комплексного пространства, $\mathcal{U}(M)$ совокупность всех окрестностей множества M, т.е. открытых множеств, содержащих M. Семейство $\mathcal{U}(M)$ частично упорядочено и направлено по включению, т.е. для любого конечного набора $U_1, \ldots, U_k$ окрестностей существует меньшая окрестность (не обязательно входящая в этот набор). Голоморфность на множестве M понимается в смысле ростков ([3]). Это означает, что элементом пространства $H(M)$ является росток, т.е. класс эквивалентности в множестве пар вида (*окрестность, голоморфная в ней функция*) по следующему отношению: две пары (U', f') и (U'', f'') эквивалентны, если существует меньшая окрестность $U \subset \mathcal{U}(M)$, в которой эти функции голоморфны и совпадают. Для ростков операции сложения и умножения на число получаются применением соответствующих операций к функциям из произвольных представителей классов эквивалентности.

Обозначим $H(M)$ пространство функций, аналитических на множестве M.

Пример 1. Функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(z - \frac{3}{2^{k+2}})^{-1}$ не имеет первообразной на односвязном множестве $M = \{-i\} \cup (i, 1+i] \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [\frac{1}{2^k} - i, \frac{1}{2^k} + i] \right)$.

Допустим, что существует $y \in H(M) : y' = f$. Так как точка $-i \in M$, то при достаточно большом k функция y голоморфна на отрезке $[\frac{1}{2^{k+1}} - i, \frac{1}{2^k} - i]$. Рассмотрим границу γ прямоугольника с вершинами в точках $\frac{1}{2^{k+1}} + i, \frac{1}{2^k} + i, \frac{1}{2^k} - i, \frac{1}{2^{k+1}} - i$. В силу сделанного предположения о существовании первообразной $\int_\gamma f(z)dz = 0$, но $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i 2^{-k} \neq 0$, где $z_k = \frac{3}{2^{k+2}}$ — простой полюс функции $f(z)$, попадающий внутрь кривой γ. Следовательно для выбранной функции $f(z)$ первообразной в M не существует.

Теорема 1. *Для множества $M \subset \mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны*:

(1) $\forall f \in H(M) \quad \exists y \in H(M) : y' = f$;

(2) *каждая окрестность множества M содержит его односвязную окрестность*;

(3) *каждое замкнутое подмножество $Z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus M$ содержится в некотором континууме $K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus M$.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) Пусть $U \supset M$ — произвольная окрестность. Чтобы показать, что она содержит односвязную подокрестность, заметим, что множество $\mathbb{C} \setminus U$ сепарабельно как подпространство сепарабельного пространства $\mathbb{C}$ ([4, стр.56, утв.3.10.9]) и потому содержит всюду плотную последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Положим $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(z - z_k)^{-1}$. Согласно условию (1) существует $y \in H(V) : \quad y' = f,\ U \supset V \supset M$. Добавим к V все точки пересечения множества U с ограниченными связными компонентами множества $\mathbb{C} \setminus V$. Если таким образом полученное открытое множество V неодносвязно, то в нем по определению существует замкнутая кривая γ, обходящая хотя бы одну точку $\zeta \in \mathbb{C} \setminus V$. Заметим, что $\zeta \notin U$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований грант № 99-01-00951

Обозначим через D односвязную область, ограниченную кривой γ. Так как точки последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ всюду плотны в $\mathbb{C}\setminus U$, то в некоторой окрестности точки существует хотя бы одна точка z_k последовательности, принадлежащая D. Но тогда $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_m 2^{-m}\neq 0$, где z_m — простые полюсы функции f, попавшие внутрь кривой γ.

(2)⇒(1) Справедливость импликации следует из определения аналитической на множестве функции и существования голоморфной первообразной в односвязной области.

(2)⇒(3) Пусть $Z\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus M$ замкнуто. Из условия (2) существует односвязная окрестность $V\subset\mathbb{C}\setminus Z$ множества M. Тогда $K=\mathbb{C}\setminus V$ — искомый континуум.

(3)⇒(2) Рассмотрим произвольную окрестность $U\supset M$. Согласно условию (3) существует континуум $K\subset\mathbb{C}\setminus M$, содержащий множество $\mathbb{C}\setminus U$. Тогда $V=\mathbb{C}\setminus K$ — требуемая односвязная окрестность множества M.

Для полноты рассмотрения исследуем теперь уравнение или систему линейных дифференциальных уравнений конечного порядка с постоянными коэффициентами $Ay=f$, где

$$A=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n}\\ \vdots & & & \vdots\\ L_{m1} & L_{m2} & \dots & L_{mn}\end{pmatrix},\quad L_{ij}=\sum_{k=1}^{p_{ij}} a_{ijk}\frac{d^k}{dz^k},\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}.$$

Для краткости будем говорить, что система $Ay=f$ *разрешима* на множестве $M\subset\mathbb{C}$, если для любых функций $f_1,\dots,f_m\in H(M)$ в $H(M)$ существуют такие функции $y_1,\dots,y_n$, что $Ay=f$.

Теорема 2. *Для любой матрицы вида A справедлива одна из следующих альтернатив*:

(1) *все миноры порядка m матрицы A взаимнопросты, при этом существует непрерывный правый обратный к A линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, решающий систему $Ay=f$,*
(2) *все миноры порядка m матрицы A тождественно равны нулю (или $n<m$), при этом система $Ay=f$ неразрешима ни на одном множестве $M\subset\mathbb{C}$,*
(3) *множество общих нулей миноров порядка m матрицы A конечно, при этом система $Ay=f$ разрешима только на тех множествах, на которых для любой функции существует первообразная.*

Доказательство. С помощью элементарных преобразований матрицу A можно ([5, стр.162]) привести к диагональной матрице A'. Известно ([5, стр. 155]), что при эквивалентные квадратные матрицы имеют один и тот же наибольший общий делитель миноров одинакового порядка. Это утверждение без существенных изменений может быть перенесено на случай прямоугольных матриц.

Предположим, что матрица A' содержит хотя бы одну нулевую строку (если хотя бы один из диагональных элементов нулевой, то в этом случае все миноры m-го порядка матрицы A тождественно равны нулю, в противном случае выполняется неравенство $n<m$), тогда в матрице A есть линейно зависимые строки. Пусть k-ая строка матрицы A является линейной комбинацией k_1-ой, k_2-ой, ... , k_s-ой строк. Для функций f_1, ... ,f_m, где f_k не равна соответствующей линейной комбинации функций f_{k_1}, ... ,f_{k_s}, решения не существует ни на одном множестве. Пусть теперь матрица A' не содержит ни одной нулевой строки.

Если произведение диагональных элементов есть многочлен нулевой степени (т.е. наибольший общий делитель миноров порядка m матрицы A — постоянное число), то матрица A имеет правую обратную матрицу, соответствующий которой дифференциальный оператор решает систему $Ay=f$ для любой правой части.

В оставшемся случае произведение диагональных элементов — многочлен ненулевой степени, а поэтому имеет конечное число нулей. Разрешимость первоначальной системы зависит от разрешимости уравнений $p_i(\frac{d}{dz})y_i=f_i$, $i=1,\dots,m$.

Разложение многочлена $p_i(\frac{d}{dz})$ на линейные множители сводит решение уравнения к решению уравнений первого порядка, которые экспоненциальной заменой приводятся к уравнению $y'=f$, полностью исследованному в Теореме 1.

Список литературы

[1] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, ч.1. М.: Наука, 1985.
[2] Знаменский С. В. О существовании голоморфных первообразных по всем направлениям // Матем. заметки 1989. Т. 45. №1. С. 16–19.
[3] Grothendieck A. Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I, II // J. reine und amgew. Math. 1953. V. 192. №2. P. 77–95.
[4] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
[5] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.