ВЫПУКЛОСТЬ В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ БАЗИСНО ОДНОСВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Знаменский С.В., Знаменская Е.А.

Условия базисной односвязности множества и его выпуклости в подходящих направлениях являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. В работе исследуется эквивалентность возможных определений выпуклости в направлении в классе базисно односвязных множеств комплексной плоскости.

Следуя [1], будем называть связное множество $Q \subset \mathbf{C}$ *базисно односвязным*, если для любого открытого множества $U \supset Q$ существует содержащаяся в нем односвязная область V, содержащая Q.

Будем обозначать $\mathbf{C}_+ = \{ z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$ и $\overline{\mathbf{C}}_+ = \{ z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0 \} \cup \{\infty\}$.

Лемма 1. Пусть пересечение базисно односвязного множества $Q \subset \overline{\mathbf{C}}$ с замкнутой в $\overline{\mathbf{C}}$ правой полуплоскостью $\overline{\mathbf{C}}_+$ связно. Тогда множество $Q \cap \overline{\mathbf{C}}_+$ базисно односвязно.

Лемма 2. Пусть D_1 и D_2 — односвязные области в $\overline{\mathbf{C}}$, содержащие связное множество Q. Тогда существует односвязная область D, содержащая Q, такая, что ее граница, лежащая в правой полуплоскости, является подмножеством границы D_1, а граница, лежащая в левой полуплоскости — подмножеством границы D_2, т.е. $\partial D \cap \mathbf{C}_+ \subset \partial D_1, \partial D \cap \mathbf{C}_- \subset \partial D_2$.

Лемма 3. Пусть пересечение базисно односвязного множества $Q \subset \mathbf{C}$ с открытой правой полуплоскостью $\mathbf{C}_+$ связно. Тогда множество $Q \cap \mathbf{C}_+$ также базисно односвязно.

Можно привести пример, показывающий, что формулировка леммы 3 не может быть расширена на множества, содержащие бесконечно удаленную точку.

Лемма 4. Для базисной односвязности множества $Q \subset \overline{\mathbf{C}}$ необходимо и достаточно, чтобы на $Q \times Q \times (\overline{\mathbf{C}} \setminus Q) \times (\overline{\mathbf{C}} \setminus Q)$ существовала единственная непрерывная однозначная ветвь функции

$$f(w, z, \zeta, \eta) = \ln\Big(\frac{w-\zeta}{w-\eta} \cdot \frac{z-\eta}{z-\zeta}\Big),$$

удовлетворяющая условию $f(w, w, \zeta, \zeta) = 0$.

Отсюда вытекает, что множество базисно односвязно вместе со своим дополнением до $\overline{\mathbf{C}}$.

Введем обозначения: $(\overline{\mathrm{c}})$ для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbf{C}}_+) \setminus Q$ связно; $(\overline{\mathrm{s}})$ для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbf{C}}_+) \setminus Q$ полуконтинуум; (c') для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbf{C}_+) \cap \mathbf{Q}$ связно; (s') для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbf{C}_+) \cap \mathbf{Q}$ полуконтинуум; $(\overline{\mathrm{c}}')$ для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbf{C}}_+) \cap Q$ связно; $(\overline{\mathrm{s}}')$ для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbf{C}}_+) \cap Q$ полуконтинуум.

Используя сформулированные выше леммы и формулировку теоремы 1 из [2], получим, что для базисно односвязных множеств выполняются импликации $(\overline{\mathrm{c}})\to(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}}')\to(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\mathrm{c}')\to(\mathrm{s}')$. Таким образом, в рассматриваемом классе множеств условия $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$ эквивалентны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований грант №99-01-00951.

Список литературы

[1] Мальцев И.М. *Эпиморфизм оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах*//Докл. РАН., 1994, Т.336, N3, С.297–300

[2] Козловская Е.А. *Условия выпуклости в заданном направлении ограниченных множеств*// Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98). Тезисы докладов., Новосибирск, 1998, С.74

Знаменский С.В. **Адрес:** Россия, 152140, Ярославская обл., Переславль-Залесский, м.Ботик, ИПС РАН
тел.: (08535) 98005
e-mail: znamensk@rustex.botik.ru

Знаменская Е.А. **Адрес:** Россия, 152140, Ярославская обл., Переславль-Залесский, м.Ботик, ИПС РАН
тел.: (08535) 98005
e-mail: ekaterin@rustex.botik.ru