УДК 517.983

С.В. Знаменский, Е.А. Козловская

Критерий эпиморфности оператора свертки с точечным носителем в пространстве функций, голоморфных на связном множестве в $\mathbb{C}$

1. Пусть $\chi(z)$ — целая функция экспоненциального типа и ассоциированная по Борелю с $\chi(z)$ функция $\overline{\chi}(z)$ имеет лишь одну особую точку. Для каждой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функция $\chi(z)$ порождает оператор свертки

$$Ly(z) = \frac{1}{2\pi i} \int y(t)\overline{\chi}(t-z)dt$$

из $H(\Omega + a)$ в $H(\Omega)$, где $H(\Omega)$ — обычное для комплексного анализа пространство голоморфных в Ω функций ($\Omega + a$ — сдвиг множества Ω на вектор a). Интересной задачей является выяснение условий, при которых L является эпиморфизмом (отображением «на»), т.е. выполняется равенство $LH(\Omega + a) = H(\Omega)$.

Так как случай $a \neq 0$ сводится к случаю $a = 0$ умножением функции $\chi(z)$ на e^{-az}, то обычно предполагается $a = 0$, где $\chi(z)$ — целая функция роста не выше чем первого порядка минимального типа.

Соответствующий критерий для области из $\mathbb{C}$ был найден Ю.Ф. Коробейником [1] (необходимые условия) и С.В. Знаменским [2] (достаточные условия). В [3] получен критерий для компактов со связным дополнением; позже эти условия были распространены О.В. Епифановым для произвольной целой функции экспоненциального типа на области [4] и компакты, являющиеся замыканием односвязной области [5]. В частности, если область выпукла, то любой оператор свертки с точечным носителем эпиморфен.

Иллюзию окончательности условий эпиморфности разрушило рассмотрение функций, аналитических на вещественной прямой или ее промежутке: Ю.Ф. Коробейником [6], В.В. Напалковым и И.А. Рудаковым [7] было показано, что эта ситуация качественно отличается от рассмотренных ранее как недостаточностью использовавшихся в формулировках условий, так и неприменимостью методов доказательств. В частности оказалось, что выпуклость промежутка прямой не гарантирует эпиморфность оператора свертки с точечным носителем в пространстве аналитических на этом промежутке функций.

Прояснить природу эффекта позволило бы исследование вопроса для естественного класса множеств, включающего в себя области на плоскости и промежутки на прямой. Разумным претендентом на эту роль являются связные множества.

Значительное прояснение ситуации было достигнуто в работах И.М. Мальцева ([8–11]), однако громоздкость формулировок и незавершенность доказательств не давали оснований считать вопрос закрытым.

2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — произвольное связное множество. Обозначим через $\mathscr{U}(\Omega)$ совокупность всех открытых множеств, содержащих Ω. Семейство $\mathscr{U}(\Omega)$ частично упорядочено и направлено по включению, т.е. для любого конечного набора $U_1, \ldots, U_k$ окрестностей существует меньшая окрестность (не обязательно входящая в этот набор). Голоморфность на множестве Ω понимается в смысле Кёте [12].

Это означает, что элементом пространства $H(\Omega)$ является росток, т.е. класс эквивалентности в множестве пар вида (*окрестность, голоморфная в ней функция*) по следующему отношению: две пары (U', f') и (U'', f'') эквивалентны, если существует меньшая окрестность $U \in \mathscr{U}(\Omega)$, в которой эти функции голоморфны и совпадают. Топология $H(\Omega)$ есть топология индуктивного предела пространств $H(U)$ по $U \in \mathscr{U}(\Omega)$.

Обозначим $\overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)}$ множество предельных точек последовательности $\{\frac{\overline{a_k}}{|a_k|}\}$, где $\{a_k\}$ — последовательность всех нулей функции $\chi(z)$. Следуя [8], ***множеством направлений выпуклости*** для Ω будем называть множество $\beta \in \Delta = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1\,\}$ таких, что для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ множество $\{\alpha + \beta z : z \in \Omega, \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\,\}$ связно.

Если при некотором $z_0 \in \Omega$ выполняется

(a) $\mathrm{Re}\,\frac{z_0}{\beta} \geqslant \mathrm{Re}\,\frac{z}{\beta}$ для всех $z \in \Omega$,

и одно из двух следующих условий:

(b_1) $z_0 - i\beta t \subset \Omega$ для любого $t > 0$,
(b_2) $z_0 - i\beta t \subset \partial\Omega \setminus \Omega$ при некотором $t > 0$,

то направление $\beta \in \Delta$ будем называть ***направлением невыпуклости справа*** для Ω. Множество всех направлений невыпуклости справа для Ω обозначим $S_+(\Omega)$. Аналогично определяется ***множество направлений невыпуклости слева*** для Ω $(S_-(\Omega))$, только знак "$-$" в условиях (b_1) и (b_2) заменяется на "$+$". Отметим, что невыпуклость множества в изолированном направлении не может сочетаться с невыпуклостью в этом направлении только слева или только справа. Все остальные комбинации направлений невыпуклости с одной стороны от данного с множеством направлений выпуклости возможны.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — произвольное связное множество, L отличен от умножения на константу. Для того, чтобы $LH(\Omega) = H(\Omega)$, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий*:

(1) *Для любого открытого множества $U \supset \Omega$ существует такая односвязная область V, что $U \supset V \supset \Omega$;*
(2) $\mathrm{Dir}_{\mathrm{conv}}(\Omega) \supset \overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)}$;
(3) $\forall \beta \in S_+(\Omega)\ \inf\{\varepsilon > 0 : \beta \cdot e^{-i\varepsilon} \in \overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)}\} > 0$;
(4) $\forall \beta \in S_-(\Omega)\ \inf\{\varepsilon > 0 : \beta \cdot e^{i\varepsilon} \in \overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)}\} > 0$.

Для обыкновенных дифференциальных операторов условия (2)–(4) исчезают и остается условие (1), не зависящее от вида оператора. Множества, удовлетворяющие этому условию, были названы в [11] *базисно односвязными.* Открытое множество базисно односвязно, только если оно — односвязная область.

В случае областей и компактов со связным дополнением $S_+(\Omega) = S_-(\Omega) = \varnothing$ и эпиморфность оператора L эквивалентна условиям (1)–(2) (см.[1–3]).

При переходе к выяснению условий эпиморфности L в случае произвольного множества оказывается, что топология пространства $H(\Omega)$ не позволяет применить использующуюся в перечисленных пространствах теорию двойственности [13]. Здесь возникают условия (3)–(4), основанные на отсутствии базиса односвязных окрестностей множества Ω, выпуклых одновременно в направлениях из $S_\pm(\Omega)$, и в достаточно близких к ним (для $S_+(\Omega)$ — в близких справа, для $S_-(\Omega)$ — в близких слева). Похожие условия появились в [6], а также (в менее удобном для формулировки и применения виде) в [8–10].

3. Кратко изложим основные идеи и этапы доказательства теоремы 1. Доказательство необходимости выполнения каждого из перечисленных условий можно провести без существенных изменений по схеме, предложенной Ю.Ф. Коробейником и И.М. Мальцевым.

Доказательство достаточности выполнения условий теоремы основывается на следующем утверждении:

Предложение 1. *В условиях теоремы* 1 $LH(\Omega) = H(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда для произвольной окрестности* $U \supset \Omega$ *существует такая содержащаяся в* U *связная окрестность* $V \supset M$, *что* $LH(V) = H(V)$.

В [6] было непосредственно проведено построение требуемой окрестности для произвольного промежутка вещественной оси; для некоторых классов множеств способ построения нужной окрестности был указан в [8,10]. Однако возможность построения в общей ситуации впервые строго обосновывается в доказательстве, план которого приведен ниже.

4. Для произвольного множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ определим на Δ опорную функцию $h(\Omega, z, \beta) = \sup\limits_{w\in\Omega} \operatorname{Re} \frac{w-z}{\beta}$ множества Ω относительно точки $z \in \mathbb{C}$ — расстояние от опорной прямой в направлении β, взятое со знаком "$-$" в содержащей Ω полуплоскости. Далее, каждому $\beta \in \Delta$ поставим в соответствие множество $\partial_\beta(\Omega) = \{z \in \Omega : h(\Omega, z, \beta) = 0\}$ крайних в направлении β точек множества Ω и обозначим $B_0(\Omega) = \{\beta \in \Delta : \partial_\beta(\Omega) \cap U = \varnothing\}$ множество, в направлениях из которого нет ни одной крайней в этом направлении точки множества Ω.

Построение нужной окрестности мы проводим в два этапа: на первом, для получения промежуточной окрестности, используется

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *для любой окрестности* $U \supset \Omega$ *существует такая выпуклая область* $V_0 \supset \Omega$, *что*

(1) $B_0(\Omega) \cap \overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)} \subset B_0(\overline{V_0})$,

(2) *Для любого* $\beta \in \overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)} \setminus B_0$ *существует лежащий в* $\overline{V_0} \cap U$ *отрезок* I_β *с концами* $z \in \partial_\beta(\Omega)$ *и* $w \in \partial_\beta(V_0)$.

На 2-ом шаге уже из окрестности V_0 строится выпуклая во всех направлениях из $\overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)}$ окрестность V множества Ω. Для этого мы определяем на V_0 функцию

$$g(\psi) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} - |\psi|, & \text{если } |\psi| \geq \pi, \\ \max\{|\psi| - \frac{\pi}{2}, \sigma\}, & \text{если } |\psi| < \pi, \end{cases}$$

где $\psi = \psi(z, \beta, w)$ — непрерывная однозначная ветвь функции $\arg(\frac{z-w}{\beta})$, принимающая на $\Omega_\beta = \Omega \cup I_\beta$ значения из интервала $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; для $w \in \partial V, \beta \in \overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)}$ пусть $\sigma(w) = \frac{|h(V,w,\beta)|}{1+|h(V,w,\beta)|}$.

Непрерывность на V_0 функции $f(z) = \inf\limits_{\beta\in\overline{\mathrm{Dir}_{\mathrm{zero}}(\chi)}, w\in\partial V_0} g(\psi)$ обеспечивает открытость множества $V = \{z \in U : f(z) > 0\}$, а выпуклость в нужных направлениях непосредственно получается из определения $f(z)$.

Согласно достаточному условию разрешимости уравнения $Ly = f$ для открытых множеств ([2]) в V существует решение этого уравнения.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант поддержки ведущих научных школ 96–15–96266).

Список литературы

[1] Коробейник Ю. Ф. // Мат. сб. 1969. Т. 80. № 1. С. 52–76.
[2] Знаменский С. В. Об областях существования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Препринт ИФСО-3М. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976.
[3] Знаменский С. В. Деп. в ВИНИТИ, № 3063-80, 1980.
[4] Епифанов О. В. // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 5. С. 695–705.
[5] Епифанов О. В. Уравнения свертки в комплексной плоскости // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 48–58.
[6] Коробейник Ю. Ф. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 2. С. 74–83.
[7] Напалков В.В., Рудаков И.А. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 3. С. 57–65.
[8] Мальцев И. М. // Деп.в ВИНИТИ, № 1241–В92 1992.
[9] Мальцев И. М. // Изв. вузов. Математика. 1994. № 7. С. 49–58.
[10] Мальцев И. М. // Изв. вузов. Математика. 1994. № 11. С. 43–52.
[11] Мальцев И. М. // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 3. С. 297–300.
[12] Köthe G. // J. reine und amgew. Math. 1953. V. 191. P. 30–49.
[13] Grothendieck A. // J. reine und amgew. Math. 1953. V. 192. № 1,2. P. 35–64, 77–95.