Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве функций, голоморфных на связном множестве

С. В. Знаменский, Е. А. Козловская

Пусть $M \subset \mathbf{C}$ — произвольное связное множество, $f(z)$ принадлежит пространству $H(M)$ голоморфных в M функций; обозначим $L = \chi(D) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi_k D^k$ — линейный дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и будем рассматривать его в предположении, что характеристическая функция $\chi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \chi_k z^k$ принадлежит классу $[1, 0]$, т.е. является целой функцией роста не выше первого порядка минимального типа.

Пусть $\Delta = \{z : |z| = 1\}$ — единичная окружность, $\mathrm{Dir_{conv}(M)}$ — множество направлений $\beta \in \Delta$, являющихся направлениями выпуклости для M; $\overline{\mathrm{Dir_{zero}}(\chi)} = \overline{\left\{\frac{a_k}{|a_k|}\right\}}$, где a_k — предельные точки последовательности нулей характеристической функции $\chi(z)$.

Если M — область или связный компакт, то необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения

$$Ly = f \qquad (*)$$

в пространстве $H(M)$ для любой правой части $f(z) \in H(M)$ является условие

$$\overline{\mathrm{Dir_{zero}}(\chi)} \subset \mathrm{Dir_{conv}(M)}, \qquad (1)$$

приведенное в [1].

Так как для произвольного множества $M \subset \mathbf{C}$ разрешимость уравнения $(*)$ эквивалентна существованию решения в как угодно малой окрестности M (для разных правых частей $f \in H(M)$ окрестности могут быть различны), то решение поставленной задачи сводится к решению следующей: для произвольной окрестности $U \supset M$ ($f \in H(U)$) построить окрестность $V \supset M$ такую, что $U \supset V$ и уравнение $(*)$ разрешимо в $H(V)$. Известно [2], что условие (1) не является достаточным для существования такой окрестности.

Будем обозначать $S_+(M)$ множество таких направлений $\beta \in \Delta$, что при некотором $z_0 \in M$ выполняется

(a) $\mathrm{Re}\frac{z_0}{\beta} \geq \mathrm{Re}\frac{z}{\beta}$ для всех $z \in M$,

и одно из двух следующих условий:

(b_1) $z_0 - i\beta t \subset M$ для любого $t > 0$,

(b_2) $z_0 - i\beta t \subset \partial M \setminus M$ при некотором $t > 0$.

Аналогично определяется множество $S_-(M)$, только знак "$-$" в условиях (b_1) и (b_2) заменяется на "$+$".

Теорема. Пусть $M \in \mathbf{C}$ — произвольное связное множество. Для разрешимости уравнения $(*)$ в пространстве $H(M)$ при любой правой части $f \in H(M)$ необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

(1) Для любого открытого множества $U \supset M$ существует такая односвязная область V, что $U \supset V \supset M$;

(2) $\mathrm{Dir_{conv}(M)} \supset \overline{\mathrm{Dir_{zero}}(\chi)}$;

(3) $\forall \beta \in S_+(M)$ $\inf\{\varepsilon > 0 : \beta \cdot e^{-i\varepsilon} \in \overline{\mathrm{Dir_{zero}}(\chi)}\} > 0$;

(4) $\forall \beta \in S_-(M)$ $\inf\{\varepsilon > 0 : \beta \cdot e^{i\varepsilon} \in \overline{\mathrm{Dir_{zero}}(\chi)}\} > 0$.

Более сложно формулируемые утверждения ранее получены в [2–4] при дополнительных ограничениях на множество M.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант ведущих научных школ 96–15–96266

Список литературы

[1] Епифанов О. В. Критерий эпиморфности оператора свертки в произвольных областях комплексной плоскости. Матем. заметки, 1982. т.31. вып.5. С. 695–705

[2] Коробейник Ю. Ф. О разрешимости уравнения свертки в некоторых классах аналитических функций. Матем. заметки, 1991. т.49. вып.2. С.74–83

[3] Мальцев И. М. Эпиморфность оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах. Докл. РАН, 1994. т.336. вып.3. С. 297–300

[4] Мальцев И. М. Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Изв. вузов. Математика, 1994. вып.7.С.49–58, вып.11.С.43–52

Знаменский С.В.
Адрес:Россия, 152140, Ярославская обл., г. Переславль-Залесский, м.Ботик, ИПС РАН
тел.:(08535) 98005
e-mail:znamensk@rustex.botik.ru

Козловская Е.А.
Адрес:660049 г. Красноярск, ул.Перенсона 7, КГПУ
тел.:27-04-06
e-mail:ekaterin@math.kgu.krasnoyarsk.su