РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт программных систем

С. В. Знаменский, Л. Н. Знаменская, Е. А. Козловская

НАПРАВЛЕНИЯ ВЫПУКЛОСТИ СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ И РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Электронный препринт ИПС № TR_1998_2

Переславль-Залесский, 1998

С. В. Знаменский, Л. Н. Знаменская, Е. А. Козловская. Направления выпуклости связных множеств и разрешимость дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Электронный препринт ИПС № TR_1998_2,
ftp.botik.ru/pub/PSI/preprints/TR_1998_2.ps,
Переславль-Залесский. 1998. — 19 с.

Исследуется эквивалентность различных определений выпуклости в направлении для произвольных множеств комплексной плоскости. Устанавливается критерий эпиморфности оператора свертки с точечным носителем. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №96-15-96266. Библиография — 15 назв.

Публикуется по решению редакционно-издательского совета ИПС РАН.

Рецензент — кандидат физико-математических наук С.В. Дужин

§1. Определение выпуклости в направлении

Будем обозначать $\mathbb{C}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ и $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant 0 \,\} \cup \{\infty\}$, для произвольных множества $Q \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ мы будем использовать обозначение $\alpha \pm \beta Q = \{\, \alpha \pm \beta z : z \in Q \,\}$, где $\alpha \pm \beta\infty = \infty$, $\beta Q = \{\, 0 + \beta z : z \in Q \,\}$. Напомним, что *полуконтинуум* это такое множество, любые две точки которого можно соединить связным компактным подмножеством. Объединение всех континуумов, содержащих данную точку p, называется *конституантой* этой точки.

Введем обозначения

(a) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ линейно связно;
(c) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ связно;
(s) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\mathbb{C}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;
($\overline{\mathrm{a}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ линейно связно;
($\overline{\mathrm{c}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ связно;
($\overline{\mathrm{s}}$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ полуконтинуум;
(a$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ линейно связно;
(c$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ связно;
(s$'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\mathbb{C}_+) \cap Q$ полуконтинуум;
($\overline{\mathrm{a}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ линейно связно;
($\overline{\mathrm{c}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ связно;
($\overline{\mathrm{s}}'$) для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ множество $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q$ полуконтинуум.

Можно объяснить, почему мы выбрали именно эти символы: на английский язык термины "линейно связное", "полуконтинуум", "связное" переводятся как "arcwise connected", "semicontinuum", "connected", поэтому в качестве обозначений естественно взять начальные буквы этих слов.

Теорема 1. *Если $Q \subset \mathbb{C}$ ограниченная область, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то выполняются импликации*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{a} & \Leftrightarrow & \overline{\mathrm{a}} & & \overline{\mathrm{a}}' & \Leftrightarrow & \mathrm{a}' \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathrm{s} & \Leftrightarrow & \overline{\mathrm{s}} & & \overline{\mathrm{s}}' & \Leftrightarrow & \mathrm{s}' \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathrm{c} & \Leftrightarrow & \overline{\mathrm{c}} & \Leftarrow = \Rightarrow & \overline{\mathrm{c}}' & \Leftrightarrow & \mathrm{c}'.
\end{array}$$

Причем если $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ связно, то $(\overline{\mathrm{s}}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}})$.

Теорема 2. *Если $Q \subset \mathbb{C}$ компакт со связным дополнением, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то выполняются импликации*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{a} & \Leftrightarrow & \overline{\mathrm{a}} & & \overline{\mathrm{a}}' & \Leftrightarrow & \mathrm{a}' \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\mathrm{s} & \Leftrightarrow & \overline{\mathrm{s}} & & \overline{\mathrm{s}}' & \Leftrightarrow & \mathrm{s}' \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathrm{c} & \Leftrightarrow & \overline{\mathrm{c}} & \Leftarrow = \Rightarrow & \overline{\mathrm{c}}' & \Leftrightarrow & \mathrm{c}'.
\end{array}$$

Если Q связно, то $(\overline{\mathrm{s}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}}')$.

Следуя [1], будем называть связное множество $Q \subset \mathbb{C}$ *базисно односвязным*, если для любого открытого множества $U \supset Q$ существует содержащаяся в нем односвязная область V, содержащая Q. Например, для открытого множества базисная односвязность эквивалентна односвязности области.

Теорема 3. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим следующую логическую* *диаграмму*:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{a} \arrow[r, Rightarrow, dashed, shift left, "7"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & \overline{\mathrm{a}} \arrow[l, Rightarrow, dashed, shift left, "2"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & & \overline{\mathrm{a}}' \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & \mathrm{a}' \arrow[l, Rightarrow, dashed, shift left, "5"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] \\
\mathrm{s} \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "6"] \arrow[r, Rightarrow, dashed, shift left, "7"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & \overline{\mathrm{s}} \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "6"] \arrow[l, Rightarrow, dashed, shift left, "2"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] \arrow[drr, Rightarrow, dashed] & & \overline{\mathrm{s}}' \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "5"] \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift left] \arrow[dll, Rightarrow, dashed] & \mathrm{s}' \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "5"] \arrow[l, Rightarrow, dashed, shift left, "4"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] \\
\mathrm{c} \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "6"] \arrow[r, Rightarrow, dashed, shift left, "7"] & \overline{\mathrm{c}} \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "1"] \arrow[l, Rightarrow, dashed, shift left, "2"] & & \overline{\mathrm{c}}' \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "1"] \arrow[r, Rightarrow, shift left] & \mathrm{c}' \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift left, "1"] \arrow[l, Rightarrow, dashed, shift left, "3"]
\end{tikzcd}
$$

Тогда

1° *справедливы все импликации, указанные на диаграмме сплошными стрелками*;
2° *если* Q *связно, то* $(\overline{\mathrm{s}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}}')$;
3° *если связно* $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$, *то* $(\overline{\mathrm{s}}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}})$;
4° *если* Q *базисно односвязно, то выполняются импликации* 1;
5° *если* Q *ограничено, то имеют место импликации* 2;
6° *если* Q *открыто, то справедливы импликации* 1 *и* $3-5$;
7° *если* Q *открытое ограниченное множество, то* $(\mathrm{c}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}})$ *и* $(\mathrm{s}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}})$;
8° *если* Q *ограниченная область, то* $(\mathrm{a}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{a}})$;
9° *если* Q *замкнуто, то имеют место импликации* 3 *и* 6;
10° *если* Q *компактно, то имеют место импликации* $1-4$ *и* $6-7$;
11° *если* Q *замкнутое множество со связным дополнением, то* $(\mathrm{a}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{a}}')$ *и* $(\mathrm{s}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$.

Следствие 1. *Для множества* $Q \subset \mathbb{C}$, *являющегося базисно односвязным, односвязной областью или связным компактом со связным дополнением, условия* (c'), (s'), $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$ *эквивалентны.*

Следствие 2. *Для базисно односвязного множества* $Q \subset \mathbb{C}$ *условия* $(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')$ *эквивалентны.*

Рассмотренные утверждения показывают, что есть несколько существенно различных способов определить выпуклость в направлении в общем случае. Чтобы выбрать определение для случая произвольного множества, воспользуемся следующей идеей: множество Q не является выпуклым, если угол, под которым оно видно из возможной точки зрения $\alpha \notin Q$, превышает π. Правильное определение выпуклости в направлении должно оставлять возможность эквивалентного определения в терминах множества значений непрерывной ветви функции $\arg z$. Для краткости будем называть *ветвью аргумента* непрерывную однозначную ветвь функции $\arg z$.

Выясним, как можно формализовать условие невыпуклости в направлении $\beta = 1$ относительно точки $\alpha = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Каждое из условий*

(A) *для любой ветви* A *функции* $\arg z$ *на* Q *существует такое* $k \in \mathbb{Z}$, *что* $2A(Q) \subset (-3\pi + 2\pi k, 3\pi + 2\pi k)$;

$(\overline{\mathrm{A}})$ *для любой ветви* A *функции* $\arg z$ *на* Q *и для всех* $k \in \mathbb{Z}$ *выполняется*

$$A(Q) = \{\, A(z) : z \in Q \,\} \not\supset \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]; \tag{1}$$

(A') *существует такое односвязное открытое множество* $\Omega \supset Q$, $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *что для любой ветви* A *функции* $\arg z$ *на* Ω *существует такое* $k \in \mathbb{Z}$, *что* $2A(\Omega) \subset (-3\pi + 2\pi k, 3\pi + 2\pi k)$;

$(\overline{\mathrm{A}}')$ *существует такое односвязное открытое множество* $\Omega \supset Q$, $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *что для любой ветви* A *функции* $\arg z$ *на* Ω *и для всех* $k \in \mathbb{Z}$ *выполняется*

$$A(\Omega) = \{\, A(z) : z \in \Omega \,\} \not\supset \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right] \tag{2}$$

влечет выполнение любого из следующих эквивалентных между собой условий:

(E) *существует такая ветвь A функции* $\arg z$ *на Q, что* $A(Q) \subset \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$;

($\overline{\mathrm{E}}$) *существует такая ветвь A функции* $\arg z$ *на Q, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливо* (1);

(E′) *существуют такое односвязное открытое множество* $\Omega \supset Q$, $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и такая ветвь A функции* $\arg z$ *на Ω, что* $2A(\Omega) \subset (-3\pi, 3\pi)$;

($\overline{\mathrm{E}}'$) *существуют такое односвязное открытое множество* $\Omega \supset Q$, $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и такая ветвь A функции* $\arg z$ *на Ω, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливо* (2).

Каждое из эквивалентных условий (A) *и* (A′) *влечет связность множества Q. Если множество Q связно, то все перечисленные условия эквивалентны. В общем случае условия* ($\overline{\mathrm{A}}$) *и* ($\overline{\mathrm{A}}'$) *эквивалентны между собой, но не эквивалентны ни одному из остальных условий.*

Хочется, чтобы множество $\alpha + \beta Q$ было выпукло в направлении β относительно точки α тогда и только тогда, когда множество Q выпукло в направлении 1 относительно точки 0. Это означает, что выпуклость множества Q в направлении β относительно точки α эквивалентно выпуклости относительно точки 0 в направлении 1 множества $\frac{Q-\alpha}{\beta}$.

Теорема 5. *Пусть* $Q \subset \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тогда условие* ($\overline{\mathrm{s}}$) *теоремы* 3 *необходимо и достаточно для того, чтобы условие* (E) *теоремы* 4 *выполнялось для множеств* $\frac{Q-\alpha}{\beta}$ *при всех* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$.

Сформулированная теорема связывает между собой ряд эквивалентных условий теоремы 4 с условиями теоремы 3. По этой причине наиболее простым и естественным определением выпуклости в направлении представляется ($\overline{\mathrm{s}}$):

Множество $Q \subset \mathbb{C}$ назовем *выпуклым в направлении* $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ множество $(\alpha - \beta \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ является полуконтинуумом.

Отметим еще, что *множество* [Q] *направлений выпуклости* произвольного множества Q однозначно определяется направлениями выпуклости Q, лежащими на единичной окружности $\Delta = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\}$.

Следствие 3. *Для выпуклости множества Q в направлении $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ необходимо и достаточно выполнения любого из эквивалентных условий* (E), $(\overline{E})$, (E'), $(\overline{E}')$ *теоремы* 4 *для множества* $\frac{Q-\alpha}{\beta}$ *при всех* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$.

§2. Доказательства утверждений из §1

Последующее изложение использует определение *отделенной части множества* M [2, 6.1.7] как такого его подмножества M', что $\overline{M'} \cap (M \setminus M') = M' \cap \overline{(M \setminus M')} = \varnothing$. Условие несвязности множества M состоит таким образом в наличии собственной (т.е. отличной от M и $\varnothing$) отделенной части.

Доказательство теоремы 1. Докажем, что ($\overline{\mathrm{a}}'$) $\Rightarrow$(a′). Пусть $z, w \in (\alpha + \beta \mathbb{C}_+) \cap Q$. С точностью до перестановки z и w можно считать, что $z \in w + \beta \overline{\mathbb{C}}_+$. Тогда из условия ($\overline{\mathrm{a}}'$) эти точки соединяются искомой кривой.

($\overline{\mathrm{s}}'$)$\Rightarrow$(s′) доказывается аналогично ($\overline{\mathrm{a}}'$)$\Rightarrow$(a′).

($\overline{\mathrm{c}}'$)$\Rightarrow$(c′) получается от противного: если две точки z, w принадлежат разным компонентам множества $(\alpha + \beta \mathbb{C}_+) \cap Q$, то с точностью до перестановки z и w можно считать, что $z \in w + \beta \overline{\mathbb{C}}_+$, что противоречит связности $(w + \beta \overline{\mathbb{C}}_+) \cap Q \subset (\alpha + \beta \mathbb{C}_+) \cap Q$.

Все импликации, соответствующие стрелкам, направленным вниз на диаграмме, тривиальны. Эквивалентность условий (a′), (s′) и (c′) вытекает из линейной связности области.

Покажем, что $(a')\Rightarrow(\overline{a}')$. Пусть $z, w \in (\alpha+\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\cap Q$. При достаточно малом положительном ε отрезки $[z, z+\varepsilon\beta]$ и $[w, w+\varepsilon\beta]$ лежат в Q. В пересечении Q с открытой полуплоскостью существует кривая, с концами $z+\varepsilon\beta$ и $w+\varepsilon\beta$. Объединение этих кривой и отрезков дают линейную связность множества $(\alpha+\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\cap Q$.

Импликация $(\overline{c})\Rightarrow(\overline{s})$ тривиальна.

$(\overline{c})\Rightarrow(c)$ Множество $((\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\setminus Q)\cup\{\infty\}$ представимо в виде объединения возрастающей последовательности множеств $\left(\alpha-\frac{\beta}{n}-\beta\overline{\mathbb{C}}_+\right)\setminus Q$, имеющих непустое пересечение, и потому связно. В силу ограниченности Q множество $(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\setminus Q$ также связно, т.е условие (c) выполнено.

$(c)\Rightarrow(\overline{c})$ Допустим что условие (c) не выполняется, т.е множество $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$ не является связным. Обозначим через M и M_1 его отделенные части. Так как Q ограничено, то ∞ не может быть изолированной точкой дополнения, т.е. не может совпадать ни с одной из связных компонент M или M_1. В силу условия (c) одна из них, например M, не пересекается с открытой полуплоскостью $(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)$, т.е является замкнутым подмножеством прямой $\partial(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)$. Тогда существует конечное число точек множества $\partial(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\cap Q$, разделяющих на прямой $\partial(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)$ множества M и $\partial(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\cap Q$. Так как Q является открытым множеством, существует $\varepsilon>0$ такое, что ε-окрестности разделяющих точек принадлежат Q. Из ε-окрестности прямой $\partial(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)$ удалим ε-окрестности выбранных разделяющих точек и обозначим через P объединение связных компонент полученного множества, пересекающих M. Прямая $\partial(\alpha+\beta\varepsilon-\beta\mathbb{C}_+)$ разделяет множество $(P\setminus(\alpha-\beta\mathbb{C}_+))\setminus Q$ и оставшуюся часть множества $\mathbb{C}\setminus Q$, поэтому множество $(P\setminus(\alpha-\beta\mathbb{C}_+))\setminus Q$ является отделенной частью множества $\mathbb{C}\setminus Q$, что противоречит условию (c).

$(\overline{s})\Rightarrow(s)$ Возьмем две произвольные точки $z, w\in(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\setminus Q$. С точностью до перестановки z и w можно считать, что $z\in(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$. В силу условия $(\overline{s})$ множество $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$ содержит связное компактное подмножество K, соединяющее точки z и w. Если K не содержит ∞, то является искомым и условие (s) выполняется. Если же любое связное компактное подмножество множества $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$, соединяющее точки z и w, содержит ∞, то множество $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$ можно представить в виде объединения двух множеств M_1 и M_2, где M_1 состоит из точек всех связных компактных подмножеств множества $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$, соединяющих точки z и ∞, а также из точек всех связных компактных подмножеств этого же множества, соединяющих точки $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$ с z и не содержащих ∞. Множество M_2 включает в себя ∞ и все остальные точки множества $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$, не входящие в M_1. M_1 и M_2 не имеют общих точек кроме точки ∞, т.к в противном случае существует связное компактное подмножество множества $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$, соединяющее точки z и w и не содержащее ∞. Пусть $M_1'=M_1\setminus\{\infty\}$ и $M_2'=M_2\setminus\{\infty\}$, тогда $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q=M_1'\cup M_2'\cup\{\infty\}$. Множества M_1' и M_2' являются отделенными частями множества $(w-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q\setminus\{\infty\}$, что противоречит условию $(\overline{c})$.

Импликация $(\overline{a})\Rightarrow(a)$ доказывается аналогично $(\overline{s})\Rightarrow(s)$.

Импликации $(s)\Rightarrow(\overline{s})$ и $(c)\Rightarrow(s)$ тривиально следуют из доказанных импликаций теоремы.

Докажем импликацию $(a)\Rightarrow(\overline{a})$: В силу условия (a) нам достаточно показать, что любая точка множества $(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\setminus Q$ может быть соединена кривой с любой точкой своей границы (в том числе и с ∞). Возьмем две точки $z, w\in(\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$, одна из которых, например z, лежит на границе полуплоскости. Можно считать, что $z=\alpha$. Линейной заменой координат сведем дело к случаю, когда $\alpha=0$, $\beta=-1$. Тогда точка w может принадлежать или мнимой оси, или открытой полуплоскости. Рассмотрим оба варианта:

1) $(\mathbb{C}_+\setminus Q)\cap(\mathbb{C}_+)=\varnothing$, т.е обе точки принадлежат мнимой оси.

Произвольная точка отрезка $[0,w]$ обязана принадлежать $\mathbb{C}_+\setminus Q$, т.к в противном случае при достаточно малых $\varepsilon>0$ множество $(-\varepsilon+\mathbb{C}_+)\setminus Q\subset\{w:-\varepsilon<\operatorname{Re}w\leqslant 0\}$, содержащее точки 0 и w не будет связным, что противоречит условию (c). Следовательно отрезок $[0,w]$ и есть искомая кривая. Заметим, что в данном пункте доказательства ни точка z, ни точка w не могут совпадать с ∞.

2) Существует $w_0\in\mathbb{C}_+\setminus Q$.

Множество $(-\varepsilon+\mathbb{C}_+)\setminus Q$ содержит кривую $\varphi(t)$, соединяющую точки w_0 и 0. Если эта кривая не имеет общих точек с прямой $\partial\mathbb{C}_+$, то она является искомой. В противном случае обозначим $L=\{t\in[0,1]:\operatorname{Re}\varphi(t)<0\}$. Это множество открыто, поэтому является объединением не более чем счетного числа непересекающихся интервалов τ_k. Пусть a_k, b_k концы дуги $\varphi(\tau_k)$ и $\operatorname{Im}a_k<\operatorname{Im}b_k$. Каждую дугу $\varphi(\tau_k)$ заменим отрезком $[a_k,b_k]$, лежащим на мнимой оси. Докажем, что произвольная точка этого отрезка принадлежит $\overline{\mathbb{C}}_+\setminus Q$. Допустим противное, тогда существует точка $M\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus Q$ и $\varepsilon>0$ такое, что ε-окрестность этой точки лежит в Q.

При $\varepsilon'<\varepsilon$ в силу условия (a) множество $(-\varepsilon'+\mathbb{C}_+)\setminus Q$ содержит кривую, соединяющую точки a_k и b_k. Рассмотрим объединение дуги $\varphi(\tau_k)$ и данной кривой. При движении точки z по кривой, лежащей в правой полуплоскости, $\arg z$ изменится на π, такое же приращение он получит, перемещаясь по дуге $\varphi(\tau_k)$, следовательно построенная кривая обходит точку M в положительном направлении один раз, поэтому M является изолированной точкой множества Q, что противоречит его связности.

Два рассмотренных случая показали, что множество $(\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q\setminus\{\infty\}$ линейно связно. Для завершения доказательства необходимо показать, что существует хотя бы одна точка этого множества, соединяющаяся кривой с ∞. Так как Q ограниченная область, то точка ∞ имеет некоторую ε-окрестность U_ε такую, что $U_\varepsilon\cup\{\infty\}$ является односвязной областью. Тогда все точки этой окрестности соединяются с ∞ кривыми, а в силу условия (a) они же соединяются кривыми с остальными точками множества $(\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q\setminus\{\infty\}$. Объединение эти кривых и дает линейную связность множества $(\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$.

Импликацию $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}}')$ будем доказывать от противного: пусть $(\alpha+\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\cap Q$ несвязно. Из связности полуплоскости и связности Q следует, что различные связные компоненты M_z и M_w этого пересечения должны иметь точки z,w на границе полуплоскости. Отрезок $[z,w]$ содержит некоторую точку $\zeta\notin Q$. Для определенности можно считать, что $\zeta=\alpha$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)>0$. Согласно условию существует континуум K, соединяющий ζ и ∞. По теореме 5 в области $\mathbb{C}\setminus K$ существует ветвь A функции $\arg z$ на $\frac{Q-\alpha}{\beta}$, принимающая значения из интервала $\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. Тогда получаем собственное отделенное подмножество $\left\{t\in Q: A\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)>\frac{\pi}{2}\right\}\cup M_z$ множества Q, что противоречит связности Q.

$(\overline{\mathrm{s}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$ Поскольку случай $Q\cap\partial(\alpha+\beta\mathbb{C}_+)=\varnothing$ не представляет интереса, то без ограничения общности можно считать $\alpha\in Q$. Инверсия $w=-\frac{1}{z-\alpha}$ относительно точки $\alpha\in Q$ с заменой Q на $\overline{\mathbb{C}}\setminus Q$ превращает доказательство данной импликации в доказательство импликации $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}}')$.

Для множества

$$M_1=\{x+iy:-0.5<x<3.5,|y|<2\}\setminus\{x+iy:x<0,y=\sin\frac{2\pi}{x}\}\setminus[-i,i]$$

выполняются все условия теоремы, кроме условий (a) и $(\overline{\mathrm{a}})$, так как невозможно точки отрезка $[-i,i]$ соединить кривой с остальными точками множества $(\alpha-\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus M_1$.

Множество $M_2=\{z:1<|z|<2\}$ показывает отсутствие импликации $(\overline{\mathrm{s}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$.

Замечание 1. *Доказательства некоторых импликаций теоремы* 1 *могут быть без изменения распространены для следующих классов множеств*:

(1) *для произвольных множеств* $(\overline{\mathrm{a}}')\Rightarrow(\mathrm{a}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')\Rightarrow(\mathrm{s}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')\Rightarrow(\mathrm{c}')$ *и импликации, соответствующие направленным вниз стрелочкам*;

(2) $(\overline{\mathrm{c}})\Rightarrow(\mathrm{c})$, $(\overline{\mathrm{a}})\Rightarrow(\mathrm{a})$, $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\mathrm{s})$ *для ограниченных множеств*;

(3) $(\overline{\mathrm{c}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}})$, $(\mathrm{c}')\Rightarrow(\mathrm{s}')\Rightarrow(\mathrm{a}')$, $(\mathrm{a}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}}')$ *для открытых множеств*;

(4) $(\mathrm{c})\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$ *для открытых ограниченных множеств*;

(5) $(\overline{\mathrm{s}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$ *для множеств со связным дополнением*;

(6) $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}}')$ *для связных множеств.*

Доказательство теоремы 2. Импликации, соответствующие стрелкам, направленным вниз на диаграмме, а также импликации $(\overline{\mathrm{a}}')\Rightarrow(\mathrm{a}')$, $(\overline{\mathrm{s}}')\Rightarrow(\mathrm{s}')$, $(\overline{\mathrm{c}}')\Rightarrow(\mathrm{c}')$, $(\overline{\mathrm{c}})\Rightarrow(\mathrm{c})$, $(\overline{\mathrm{s}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$ справедливы в силу замечания к теореме 1. Если Q связно, то выполняется импликация $(\overline{\mathrm{s}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$.

Эквивалентность условий (a), (s) и (c) вытекает из линейной связности области $(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\setminus Q$. Импликация $(\overline{\mathrm{c}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}}')$ тривиальна.

$(\mathrm{c}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}}')$. Пусть множество $N=(\alpha+\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\cap Q$ несвязно, а M и M' его различные отделенные части. Одна из них, например M', не пересекается с открытой полуплоскостью $\alpha+\beta\mathbb{C}_+$ и, следовательно, является замкнутым подмножеством прямой $\partial(\alpha+\beta\mathbb{C}_+)$. Тогда существуют конечное число точек множества $\partial(\alpha+\beta\mathbb{C}_+)\setminus Q$, разделяющих M' и $M\cap\partial(\alpha+\beta\mathbb{C}_+)$ на этой прямой. Пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что ε-окрестности выбранных разделяющих точек не пересекают Q. Удалим из ε-окрестности этой прямой ε-окрестности выбранных разделяющих точек и обозначим через S объединение связных компонент полученного множества, пересекающих M'. Множество $(S\setminus(\alpha+\beta\mathbb{C}_+))\cap Q$ является отделенным подмножеством множества Q, что противоречит условию (c').

Импликацию $(\mathrm{a}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}}')$ можно доказать от противного: пусть множество $(\alpha+\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\cap Q$ не является линейно связным, т.е. две его точки z,w нельзя в нем соединить кривой. Поскольку одна из них в силу условия (a') обязательно лежит на границе полуплоскости, то можно считать, что $w=\alpha$. Линейной заменой координат сводим рассмотрение к случаю $\alpha=0$ и $\beta=1$. Возможны два случая:

1) $Q\cap\mathbb{C}_+=\varnothing$, т.е. обе точки лежат на мнимой оси. Произвольная точка отрезка $[0,z]$ обязана принадлежать Q, так как в противном случае при достаточно малом $\varepsilon>0$ множество $(-\varepsilon+\mathbb{C}_+)\cap Q\subset\{\,z:-\varepsilon<\operatorname{Re}z\leqslant 0\,\}$, содержащее точки 0 и z, не будет связно. Таким образом отрезок $[0,z]$ и есть искомая кривая.

2)Существует точка $z_0\in\mathbb{C}_+\cap Q$

Множество $(-\varepsilon+\mathbb{C}_+)\cap Q$ содержит кривую $\varphi(t)$, соединяющую точки z_0 и 0. Если эта кривая не имеет общих точек с прямой $\partial\mathbb{C}_+$, то она является искомой. В противном случае обозначим $L=\{t\in[0,1]:\operatorname{Re}\varphi(t)<0\}$. Это множество открыто, поэтому является объединением не более чем счетного числа непересекающихся интервалов τ_k. Пусть a_k, b_k концы дуги $\varphi(\tau_k)$ и $\operatorname{Im}a_k<\operatorname{Im}b_k$. Каждую дугу $\varphi(\tau_k)$ заменим отрезком $[a_k,b_k]$, лежащим на мнимой оси. Докажем, что произвольная точка этого отрезка принадлежит Q. Допустим противное, тогда существует точка $M\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus Q$ и $\varepsilon>0$ такое, что ε-окрестность этой точки не пересекает Q.

В силу условия (a') при $\varepsilon'<\varepsilon$ множество $(-\varepsilon'+\mathbb{C}_+)\cap Q$ содержит кривую, соединяющую точки a_k и b_k. Рассмотрим объединение дуги $\varphi(\tau_k)$ и данной кривой. При движении точки z по кривой, лежащей в правой полуплоскости, $\arg z$ изменится на π, такое же приращение он получит, перемещаясь по дуге $\varphi(\tau_k)$, следовательно построенная кривая обходит точку M в положительном направлении один раз, поэтому M является изолированной точкой множества $\overline{\mathbb{C}}_+\setminus Q$, что противоречит связности дополнения.

Покажем $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}})$. Достаточно показать, что любую точку w_0 множества $\Omega=(\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$ можно соединить лежащей в нем кривой с бесконечно удаленной точкой. Поскольку Ω полуконтинуум, то существует континуум $K\subset\Omega$, содержащий точки w_0 и ∞. Без ограничения общности можно считать, что $K\setminus\{\infty\}$ связно. Для любого $n\in\mathbb{N}$ существует точка w_n, лежащая в связной компоненте множества $\{\,z\in K:|z-w_0|>n\,\}$, содержащей бесконечно удаленную точку. В силу открытости $\Omega\setminus\{\infty\}$ в $\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+$ для любого $n\in\mathbb{N}$ существует кривая $\gamma_n\subset\Omega$, соединяющая точки w_n и w_{n-1} в $\{\,z:|z-w_0|>n-2\,\}$. Последовательность построенных кривых приближается к бесконечно удаленной точке и поэтому объединение ∞ и всех этих кривых есть искомая кривая.

Осталось доказать, что $(\mathrm{c})\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}})$. Пусть z и $w\in(\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$. Поскольку Q компактно, то достаточно рассмотреть случай $z,w\neq\infty$. При достаточно малом $\varepsilon>0$ отрезки $[z,z-\varepsilon\beta]$ и $[w,w-\varepsilon\beta]$ не пересекают замкнутое множество Q. В области $(\alpha-\beta\mathbb{C}_+)\setminus Q$ существует кривая, соединяющая точки $z-\varepsilon\beta$ и $w-\varepsilon\beta$. Присоединяя к этой кривой указанные выше отрезки, получаем линейную связность множества $(\alpha-\beta\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus Q$.

Импликации $(\overline{\mathrm{c}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}})$, $(\mathrm{s})\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}})$, $(\mathrm{a})\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}})$, $(\mathrm{c}')\Rightarrow(\mathrm{s}')$, $(\mathrm{s}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}}')$ тривиально следуют из доказанных.

Для множества $M_3=\big\{\,x+i\sin\frac{2\pi}{x}:x\in(0,4]\,\big\}\cup[-i,i]$ не выполняются условия (a') и $(\overline{\mathrm{a}}')$.

Пример двухточечного множества $M_4=\{0,1\}$ показывает, что ни одно из условий правой половины диаграммы не может следовать ни из какого условия левой половины диаграммы.

Данные доказательства и приведенные примеры показывают, что кроме импликаций, указанных в формулировках (и тривиально из них получающихся), никакие другие выполняться не могут.

Замечание 2. *Доказательства некоторых импликаций теоремы* 2 *могут быть без изменения распространены для следующих классов множеств*:

(1) $(\overline{\mathrm{s}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}})$, $(\mathrm{c})\Rightarrow(\mathrm{s})\Rightarrow(\mathrm{a})$, $(\mathrm{c}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}}')$ *для замкнутых множеств*;

(2) $(\mathrm{a}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}}')$ *для замкнутых множеств со связным дополнением*;

(3) $(\overline{\mathrm{c}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\mathrm{c})\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}})$ *для компактных множеств.*

Сформулируем вспомогательные результаты, необходимые для доказательства некоторых импликаций теоремы 3.

Лемма 1. *Пусть пересечение базисно односвязного множества $Q\subset\overline{\mathbb{C}}$ с замкнутой в $\overline{\mathbb{C}}$ правой полуплоскостью $\overline{\mathbb{C}}_+$ связно. Тогда множество $Q\cap\overline{\mathbb{C}}_+$ базисно односвязно.*

Доказательство леммы 1. Возьмем произвольную окрестность Ω множества $\overline{\mathbb{C}}_+\cap Q$ и обозначим через F объединение ограниченных связных компонент дополнения Ω до $\overline{\mathbb{C}}_+$. Тогда $U=\Omega\cup(\mathbb{C}_-\setminus F)$ будет окрестностью всего множества Q (здесь $\mathbb{C}_-$ — открытая левая полуплоскость). Нетрудно заметить, что U имеет те и только те связные компоненты дополнения до $\overline{\mathbb{C}}$, что и Ω. Согласно условию, можно найти односвязную область V, содержащуюся в U такую, что $Q\subset V$. Но тогда связная компонента пересечения $V\cap\Omega$, содержащая Q, будет односвязной связной окрестностью множества $\overline{\mathbb{C}}_+\cap Q$, содержащейся в Ω.

Лемма 2. *Пусть D_1 и D_2 — односвязные области в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащие связное множество Q. Тогда существует односвязная область D, содержащая Q, такая, что ее граница, лежащая в правой полуплоскости, является подмножеством границы D_1, а граница, лежащая в левой полуплоскости — подмножеством границы D_2, т.е. $\partial D\cap\mathbb{C}_+\subset\partial D_1$, $\partial D\cap\mathbb{C}_-\subset\partial D_2$.*

Доказательство леммы 2. Рассмотрим множество $A = \{\zeta \in \partial D_1 \cup \partial D_2 : \mathrm{Re}\,\zeta = 0\}$ точек пересечения границ областей D_1 и D_2 с мнимой осью. Из множества

$$(D_1 \cup D_2) \setminus ((D_2 \setminus D_1) \cap \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus ((D_1 \setminus D_2) \cap \overline{\mathbb{C}}_-)$$

удалим точки всех отрезков вида $[\zeta', \zeta'']$, где ζ', $\zeta'' \in A$, и их выпуклая оболочка не содержит точек множества Q. К полученному множеству D' добавим ограниченные связные компоненты F дополнения $D_1 \cup D_2$ до $\overline{\mathbb{C}}$, обозначим $D'' = D' \cup F$, тогда связная компонента множества D'', содержащая Q, и есть требуемая окрестность D. Односвязность D следует из построения.

Лемма 3. *Пусть пересечение базисно односвязного множества $Q \subset \mathbb{C}$ с открытой правой полуплоскостью $\mathbb{C}_+$ связно. Тогда множество $Q \cap \mathbb{C}_+$ также базисно односвязно.*

Доказательство леммы 3. Возьмем произвольную окрестность $\Omega \supset \mathbb{C}_+ \cap Q$ и пусть F — объединение ограниченных связных компонент дополнения Ω до $\overline{\mathbb{C}}_+$. Через l_k будем обозначать границу полуплоскости $P_k = (d/2^k - \mathbb{C}_+)$, где $d > 0$ — некоторое фиксированное число.

Выберем d так, чтобы пересечение $l_0 \cap Q \neq \varnothing$. Окрестность $(P_0 \cup \Omega) \setminus F$ множества Q содержит односвязную подокрестность V_0, а в открытом множестве $(P_1 \cup \Omega) \setminus F$, также содержащем Q, можно выбрать односвязную подобласть $U_0 \supset Q$. Применим лемму 2 к областям V_0, U_0 и прямой l_0, полученную окрестность обозначим через V_1. Далее, окрестность $(P_2 \cup \Omega) \setminus F$ множества Q содержит односвязную область $U_1 \supset Q$, можно применить лемму 2 к областям V_1, U_1 и прямой l_1, результат обозначим через V_2, и т.д. На k-ом шаге имеем односвязную область V_k, содержащую Q, из окрестности $(P_k \cup \Omega) \setminus F \supset Q$ выбираем связную односвязную подокрестность U_k множества Q; применяя лемму 2 к областям V_k, U_k и прямой l_k, получим односвязную область V_{k+1}, содержащую Q. Очевидно, что $V_k \subset V_{k+1}$, и объединение $\bigcup\limits_k V_k$ будет требуемой односвязной связной окрестностью множества $Q \cap \mathbb{C}_+$.

Отметим, что формулировка леммы 3 не может быть расширена на множества, содержащие бесконечно удаленную точку. Невозможность такого распространения показывает пример множества M_4, являющегося дополнением до $\mathbb{C}$ к множеству

$$M = \left\{ x + i\frac{\sin^2 \frac{2\pi}{x}}{x} : x \in (0,\, 3.5] \right\} \cup [0, +i\infty).$$

Доказательство теоремы 3. Доказательство пунктов 1°–3°, 5°, 7° согласно замечанию к теореме 1 сводится к доказательству теоремы 1.

4° Из базисной односвязности множества следует полуконтинуальность самого множества и его дополнения до $\overline{\mathbb{C}}$ ([3]), поэтому применение леммы 1 к множеству Q и полуплоскости $(\alpha + \beta\overline{\mathbb{C}}_+)$ доказывает справедливость импликации $(\overline{\mathrm{c}}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$. Множество $Q' = \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ также базисно односвязно ([3]), поэтому $(\overline{\mathrm{c}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}})$ следует из леммы 1, рассматриваемой для полуплоскости $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+)$. Импликация $(\mathrm{c}') \Rightarrow (\mathrm{s}')$ следует из леммы 3.

6° Импликации $(\overline{\mathrm{c}}) \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}})$, $(\mathrm{c}') \Rightarrow (\mathrm{s}') \Rightarrow (\mathrm{a}')$, $(\mathrm{a}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{a}}')$ также получаются на основе замечания к теореме 1. Для открытых множеств $(\mathrm{c}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{c}}')$, $(\overline{\mathrm{c}}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$, $(\mathrm{s}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$, $(\overline{\mathrm{s}}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{a}}')$ тривиально следуют из доказанных раньше.

Пункт 8° доказан в теореме 1.

Доказательство 9° следует из замечания к теореме 2.

10° $(\overline{\mathrm{c}}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\mathrm{c})\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}})$ для компактных множеств вытекают из замечания к теореме 2. Существование импликации $(\overline{\mathrm{c}})\Rightarrow(\mathrm{c})$ показывает замечание к теореме 1. Тогда импликации $(\mathrm{c}')\Rightarrow(\mathrm{s}')$, $(\mathrm{s}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}}')$, $(\mathrm{c})\Rightarrow(\overline{\mathrm{c}})$, $(\overline{\mathrm{c}})\Rightarrow(\overline{\mathrm{s}})$, $(\overline{\mathrm{s}})\Leftrightarrow(\mathrm{s})$, $(\overline{\mathrm{a}})\Leftrightarrow(\mathrm{a})$ для компактных множеств получаются тривиально.

11° Импликация $(\mathrm{a}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}}')$ следует из замечания к теореме 2.

$(\mathrm{s}') \Rightarrow (\overline{\mathrm{s}}')$ будем доказывать от противного: пусть множество $(\alpha+\beta\overline{\mathbb{C}}_{+})\cap Q$ не полуконтинуум, значит существуют хотя бы две точки z, w этого множества, не соединяющиеся никаким связным компактным подмножеством множества $(\alpha+\beta\overline{\mathbb{C}}_{+})\cap Q$. Поскольку одна из них в силу условия (s') обязательно лежит на границе полуплоскости, то можно считать, что $w=\alpha$. Линейной заменой координат сводим рассмотрение к случаю $\alpha=0$ и $\beta=1$. Возможны два случая:

1) $Q\cap\mathbb{C}_{+}=\varnothing$, т.е. обе точки лежат на мнимой оси. Произвольная точка отрезка $[0, z]$ обязана принадлежать Q, так как в противном случае при достаточно малом $\varepsilon>0$ множество $(-\varepsilon+\mathbb{C}_{+})\cap Q\subset\{\,z: -\varepsilon<\operatorname{Re} z\leqslant 0\,\}$, содержащее точки 0 и z, не будет связно. Таким образом отрезок $[0, z]$ и есть искомый континуум.

2) Существует $w_0\in\mathbb{C}_{+}\cap Q$.

Множество $(-1+\mathbb{C}_{+})\cap Q$ содержит континуум, соединяющий точки w_0 и 0. Он является искомым, если не имеет общих точек с левой полуплоскостью. В противном случае каждую связную компоненту пересечения левой полуплоскости с замкнутым множеством заменяем замкнутой выпуклой оболочкой граничных точек. Покажем, что произвольные точки этих оболочек принадлежат Q. Допустим, что это не так, тогда существует точка $M\in\overline{\mathbb{C}}_{+}\setminus Q$ и $\varepsilon>0$ такое, что ε-окрестность этой точки не пересекает Q. При $\varepsilon'<\varepsilon$ множество $(-\varepsilon'+\mathbb{C}_{+})\cap Q$ в силу условия (s') содержит континуум, соединяющий концы a_k и b_k выбранной выпуклой оболочки. Возьмем такое $\delta>0$, что δ-окрестность этих двух континуумов не содержит точку M. Тогда в каждой из этих окрестностей существуют кривые, соединяющие a_k и b_k. Рассмотрим объединение выбранных окрестностей. Замкнутая кривая, соединяющая точки a_k и b_k, изолирует точку M от остальных точек дополнения. Доказательство этого факта аналогично приведенному в доказательстве $(\mathrm{a}')\Rightarrow(\overline{\mathrm{a}}')$ теоремы 2.

Предложение 1. *Пусть A — ветвь функции $\arg z$ на произвольном множестве $Q\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, принимающая значения в интервале (a, b), $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Тогда существуют односвязное открытое множество $\Omega\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $Q\subset\Omega$, и ветвь A_1 функции $\arg z$, продолжающая на Ω функцию A.*

Доказательство предложения 1. Для любой точки $z_0\in Q$ существует $0<\delta(z_0)<|z_0|$ такое, что в $\delta(z_0)$-окрестности $(z_0+\delta(z_0)U)\cap Q$ (где $U=\{\,z: |z|<1\,\}$ — единичный круг) точки z_0 ветвь A функции $\arg z$ принимает близкие значения: $|A(z)-A(z_0)|<1$. В каждой из окрестностей $z_0+\frac{1}{2}\delta(z_0)U$ однозначно выделяется ветвь $A_1(z)$ функции $\arg z$, продолжающая $A(z)$. Если это продолжение принимает значения, выходящие за интервал (a, b), то нетрудно уменьшить δ так, чтобы значения продолжения $A_1(z)$ остались в указанном интервале.

Покажем, что построенное продолжение не зависит от точки z_0. Пусть z_0', z_0'' две разные точки Q, из которых мы получили продолжение в точку z. Пусть для определенности $|z-z_0'|<|z-z_0''|$. Тогда $|z_0'-z_0''|\leqslant 2\,|z-z_0''|\leqslant\delta(z_0'')$, т.е. по построению $|A(z_0')-A(z_0'')|<1$.

Обозначим $\Omega=\bigcup_{z_0\in Q}\left(z_0+\frac{1}{2}\delta(z_0)U\right)$. Нами построена ветвь A_1 функции $\arg z$ в Ω, совпадающая с исходной ветвью на Q и принимающая значения из интервала (a, b).

Если Ω неодносвязно, то для произвольной простой замкнутой кривой $\gamma\subset\Omega$ обозначим через D ограниченную связную компоненту множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$. Эта компонента не может содержать точку 0 поскольку приращение функции $\arg z$ по любой замкнутой кривой, лежащей в Ω равно 0. Поэтому в D выделяется ветвь функции $\arg z$. В силу связности кривой γ разность значений этой ветви и $A_1(z)$ постоянно. Вычитая эту разность из выбранной ветви, получаем очевидно единственное продолжение функции $A_1(z)$ в D. Нетрудно заметить, что продолжения функции $A_1(z)$, построенные для разных кривых, совпадают в общих точках областей определения. Присоединяя к Ω все ограниченные связные компоненты дополнений до простых замкнутых кривых из Ω, получаем множество с требуемыми свойствами.

Следствие 4. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ и для любой точки $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ существует ветвь функции $\arg(z-\alpha)$ на Q. Тогда $\overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ полуконтинуум.*

Действительно, континуумы $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_\alpha$ связывают произвольную $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus Q$ с точкой ∞.

Доказательство теоремы 4. Следующие импликации являются тривиальными:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}' \arrow[rrr, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow, "1"', "1"] & & & \overline{\mathrm{E}}' \arrow[ddd, Rightarrow, "1"', "1"] \\
& \mathrm{A}' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow, "2"'] & \overline{\mathrm{A}}' \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow, "2"] & \\
& \mathrm{A} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow, "2"] & \overline{\mathrm{A}} \arrow[dr, Rightarrow, "2"'] & \\
\mathrm{E} \arrow[rrr, Rightarrow] & & & \overline{\mathrm{E}}
\end{tikzcd}$$

Импликации, помеченные цифрой 1, обратимы, поскольку Ω из предложения 1 легко подправляется так, чтобы ветвь аргумента принимала допустимые значения.

($\overline{\mathrm{E}}$)$\Rightarrow$(E). Пусть $\varphi_k \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$ такие, что $\varphi_k \notin A(Q)$. Определим функцию $\Phi_k(t) = 2\pi k$ на отрезке $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$. Тогда разность $A_1(z) = A(z) - \Phi_k(A(z))$ есть ветвь функции $\arg z$ такая, что $-\frac{3\pi}{2} < A_1(z) < \frac{3\pi}{2}$. Аналогично получается импликация ($\overline{\mathrm{E}}'$)$\Rightarrow$(E$'$).

На связном множестве существует ровно одна ветвь функции $\arg z$ с точностью до константы $2\pi k$. Отсюда легко получается обращение импликаций, помеченных цифрой 2 и, следовательно, эквивалентность всех условий теоремы.

Для $Q_1 = \left\{ 2e^{i\theta} : \frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2} \right\}$, $\quad Q_2 = -i$, $\quad Q = Q_1 \cup Q_2$, ветвь $A(z)$ функции $\arg z$, принимающая значения $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, не укладывается в условия ($\overline{\mathrm{A}}$), а ветвь $A(z)$, принимающая значения $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \{-\frac{\pi}{2}\}$, удовлетворяет условию ($\overline{\mathrm{E}}$).

Для множества $Q = \{1, 2\}$ выполнены ($\overline{\mathrm{A}}$) и ($\overline{\mathrm{A}}'$) и не выполнены (A) и (A$'$).

Доказательство теоремы 5. Достаточность. Пусть $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$. Тогда по условию ($\overline{\mathrm{s}}$) существует связный компакт $K \subset (\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$, соединяющий точки α и ∞. При этом односвязное открытое множество $D = \mathbb{C} \setminus \left(\frac{K-\alpha}{\beta}\right)$ содержит правую полуплоскость $\mathbb{C}_+$. В компоненте, содержащей правую полуплоскость, однозначно выделяется ветвь аргумента, принимающая значения на требуемом интервале. Остальные компоненты лежат в левой полуплоскости $-\mathbb{C}_+$ и в них однозначно выделяются ветви аргумента со значениями на меньшем интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Необходимость. От противного: пусть точки a и b множества $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$ не соединяются связным компактом. Тогда хотя бы одна из них не соединяется связным компактом с точкой ∞. Без ограничения общности можно считать, что эта точка совпадает с точкой α. С другой стороны ветвь аргумента из условия (E) однозначно продолжается на правую полуплоскость, что противоречит следствию 4, примененному к множеству $\left(\frac{Q-\alpha}{\beta}\right) \cup \mathbb{C}_+$.

Только что доказанная теорема означает, что выпуклость множества Q в направлении β эквивалентна выпуклости Q в этом направлении относительно каждой точки его дополнения до $\mathbb{C}$. Оказывается, что это условие можно несколько ослабить. А именно, справедливо следующее

Предложение 2. *Пусть множество $Q \subset \mathbb{C}$ выпукло в направлении β относительно каждой своей граничной точки. Тогда Q выпукло в направлении β.*

Доказательство предложения 2. Согласно теореме 5, выпуклость Q в направлении β относительно точки α эквивалентна существованию на Q непрерывной однозначной ветви функции $\arg\left(\frac{z-w}{\beta}\right)$ со значениями из интервала $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Предположим, что Q невыпукло в направлении β. Из следствия 3 получаем, что существует $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ и $z_0 \in Q$, для которых $|\arg\left(\frac{z_0-\alpha}{\beta}\right)| \geqslant \frac{3\pi}{2}$. По условию Q выпукло в рассматриваемом направлении относительно граничных точек, поэтому можно считать $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{Q}$. Отрезок, соединяющий точки z_0 и α, пересекает ∂Q в точке w_0 (ближайшая к z_0 по отрезку точка пересечения). Тогда $|\psi(z_0, \beta_0, \alpha)| = |\psi(z_0, \beta_0, w_0)| < \frac{3\pi}{2}$, но по предположению $|\psi(z_0, \beta_0, \alpha)| \geqslant \frac{3\pi}{2}$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения.

§3. Об эпиморфности оператора свертки в некоторых пространствах аналитических функций

Пусть Q — произвольное связное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathscr{U}(Q)$ совокупность всех открытых множеств, содержащих Q. Семейство $\mathscr{U}(Q)$ частично упорядочено и направлено по включению, т.е. для любого конечного набора $U_1, \ldots, U_k$ окрестностей существует меньшая окрестность (не обязательно входящая в этот набор). Голоморфность на множестве Q понимается в смысле Кёте ([4]). Это означает, что элементом пространства $H(Q)$ является росток, т.е. класс эквивалентности в множестве пар вида (*окрестность, голоморфная в ней функция*) по следующему отношению: две пары (U', f') и (U'', f'') эквивалентны, если существует меньшая окрестность $U \in \mathscr{U}(Q)$, в которой эти функции голоморфны и совпадают. Топология $H(Q)$ есть топология индуктивного предела пространств $H(U)$ по $U \in \mathscr{U}(Q)$ (более подробно см. [5]).

Пусть $\chi(z)$ — целая функция экспоненциального типа и ассоциированная по Борелю с $\chi(z)$ функция $\overline{\chi}(z)$ имеет лишь одну особую точку a. На множестве Q функция $\chi(z)$ порождает оператор свертки

$$Ly(z) = \frac{1}{2\pi i} \int y(t)\overline{\chi}(t-z)dt,$$

действующий из $LH(Q+a)$ в $H(Q)$ (здесь $Q+a$ — сдвиг множества Q на вектор a). Естественно возникает вопрос, при каких условиях справедливо обратное включение, т.е. L является эпиморфизмом (отображением «на»), что эквивалентно равенству $LH(Q+a) = H(Q)$.

Так как случай $a \neq 0$ нетрудно свести к случаю $a = 0$ умножением $\chi(z)$ на e^{-az}, то обычно предполагается $a = 0$ и $\chi(z)$ — целая функция роста не выше чем первого порядка минимального типа ($\chi(z) \in [1, 0]$).

Для области из $\mathbb{C}$ необходимые условия были найдены Ю.Ф. Коробейником ([6]), достаточные — С.В. Знаменским ([7]). В [8] получен критерий для компактов со связным дополнением; позже эти условия были распространены О.В. Епифановым для произвольной целой функции экспоненциального типа на области ([9]) и компакты, являющиеся замыканием односвязной области ([10]). В частности, если область выпукла, то любой оператор свертки с точечным носителем эпиморфен.

Для множеств, не являющихся открытыми или замкнутыми, связь между геометрическим строением множества и свойствами самого оператора L менее изучена. Однако Ю.Ф. Коробейником ([11]), В.В. Напалковым и И.А. Рудаковым ([12]) была показана недостаточность использовавшихся в формулировках условий и неприменимость методов доказательств. Нетривиальность случая подтверждается в частности тем, что выпуклость промежутка прямой не гарантирует разрешимость уравнения

$$Ly = f \tag{*}$$

в пространстве аналитических на этом промежутке функций. Прояснить природу такого эффекта позволяет исследование данного вопроса в классе связных множеств.

Существенное продвижение было достигнуто в работах И.М. Мальцева ([2,13–15]), однако громоздкость формулировок и незавершенность доказательств не дают оснований считать вопрос закрытым.

Согласно замечанию выше, можно считать $\chi(z) \in [1,0]$. Обозначим $[\chi]$ множество предельных точек последовательности $\{\frac{\overline{a_k}}{|a_k|}\}$, где $\{a_k\}$ — последовательность всех нулей функции $\chi(z)$.

Так как направления выпуклости произвольного множества определяются направлениями, лежащими на единичной окружности, то в дальнейшем будем считать $[\mathrm{Q}] \subset \Delta$.

Если при некотором $z_0 \in Q$ выполняется

(a) $\mathrm{Re}\,\frac{z_0}{\beta} \geqslant \mathrm{Re}\,\frac{z}{\beta}$ для всех $z \in Q$,

и одно из двух следующих условий:

(b_1) $z_0 - i\beta t \subset Q$ для любого $t > 0$,

(b_2) $z_0 - i\beta t \subset \partial Q \setminus Q$ при некотором $t > 0$,

то направление $\beta \in \Delta$ будем называть *направлением невыпуклости справа* для Q. Множество всех направлений невыпуклости справа для Q обозначим $S_+(Q)$. Аналогично определяется *множество $S_-(Q)$ направлений невыпуклости слева* для Q, только знак "$-$" в условиях (b_1) и (b_2) заменяется на "$+$".

Замечание 3. Невыпуклость множества в изолированном направлении не может сочетаться с невыпуклостью в этом направлении только слева или только справа. Все остальные комбинации направлений невыпуклости с одной стороны от данного с множеством направлений выпуклости возможны.

Теорема 6. *Пусть $Q \subset \mathbb{C}$ — произвольное связное множество, а L отличен от умножения на константу. Тогда для разрешимости уравнения (*) в пространстве $H(Q)$ при любой правой части $f \in H(Q)$ необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий*:

(1) *Для любого открытого множества $U \supset Q$ существует такая односвязная область V, что $U \supset V \supset Q$;*

(2) $[\mathrm{Q}] \supset [\chi]$;

(3) $\forall \beta \in S_+(Q)$ $\inf\{\varepsilon > 0 : \beta \cdot e^{-i\varepsilon} \in [\chi]\} > 0$;

(4) $\forall \beta \in S_-(Q)$ $\inf\{\varepsilon > 0 : \beta \cdot e^{i\varepsilon} \in [\chi]\} > 0$.

Для обыкновенных дифференциальных операторов условия (2)–(4) исчезают и остается условие (1), не зависящее от вида оператора. В случае областей и компактов со связным дополнением $S_+(Q) = S_-(Q) = \varnothing$ и эпиморфность оператора L эквивалентна условиям (1)–(2) (см.[6,7]). При переходе к выяснению условий эпиморфности L в случае произвольного множества оказывается, что топология пространства $H(Q)$ не позволяет применить использующуюся в перечисленных пространствах теорию двойственности [5]. Здесь возникают условия (3)–(4), основанные на отсутствии базиса односвязных окрестностей множества Q, выпуклых одновременно в направлениях из $S_\pm(Q)$, и в достаточно близких к ним: для $S_+(Q)$ — в близких справа, для $S_-(Q)$ — в близких слева. Похожие условия появились в [11], а также (в менее удобном для формулировки и применения виде) в [2,13–15].

Доказательство теоремы 6. Необходимость.

Условие (1) означает, что множество Q связно и любая его окрестность $U \supset Q$ содержит односвязную область, также содержащую Q. Зафиксировав любой нуль n_0 функции χ, достаточно рассматривать оператор первого порядка $L_1 = \mathrm{D} - n_0$, поскольку оператор L_2 с характеристической функцией $\frac{\chi(\zeta)}{\zeta - n_0}$ превращает решение исходного уравнения в решение уравнения первого порядка.

Предположим, что для некоторой окрестности $U \supset Q$ любая область V, содержащая Q и содержащаяся в U, неодносвязна. Рассмотрим в $\mathbb{C} \setminus V$ счетное всюду плотное множество $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функцию $f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^{-k} e^{n_0 a_k}}{z - a_k}$.

Допустим, что уравнение $L_1 y = f_0(z)$ разрешимо в пространстве $H(Q)$, и, следовательно, в некоторой окрестности $V \supset Q$.

Если бы каждая простая замкнутая кривая в V была стягиваема в U, то, добавляя к V ограниченные такими кривым области, мы бы получили несуществующую односвязную подокрестность множества Q в U. Поэтому есть нестягиваемая в U простая кривая γ, обходящая некоторое подмножество S выбранного счетного всюду плотного множества. Интегрируя по частям и используя равномерную сходимость ряда на любом не содержащем S компакте, имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\gamma y(z) \cdot 0 \, dz = \int_\gamma y(z)(\mathrm{D} + n_0) e^{-z n_0} \, dz \\
&= -\int_\gamma \mathrm{D}\, y(z) e^{-z n_0} \, dz + \int_\gamma n_0 y(z) e^{-z n_0} \, dz \\
&= -\int_\gamma (\mathrm{D} - n_0) y(z) e^{-z n_0} \, dz = -\int_\gamma f_0(z) e^{-z n_0} \, dz \\
&= -\int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} e^{n_0 a_k}}{z - a_k} e^{-z n_0} \, dz = -2\pi i \sum_{a_k \in S} 2^{-k} < 0.
\end{aligned}$$

Противоречие доказывает необходимость выполнения условия (1).

Для доказательства необходимости выполнения условий (2)–(4) нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Пусть f голоморфна в окрестности простой кривой γ с концами a и b. Тогда функция $I_\gamma[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ голоморфна вне кривой γ.

Лемма 4. *Функция* $\psi = I_\gamma[Lf] - L I_\gamma[f]$ *голоморфна в* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$ *и* $\psi(\infty) = 0$.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим простую кривую γ_1 с теми же концами, не имеющую с γ общих точек кроме концов и настолько близкую к γ, что f голоморфна в замкнутой области D с границей $\gamma_1 - \gamma$. Из интегральной формулы Коши легко получается, что функция $\psi_1 = I_{\gamma_1}[Lf] - L I_{\gamma_1}[f]$ совпадает с ψ как вне $\overline{D}$, так и внутри D и тем самым осуществляет однозначное аналитическое продолжение ψ на все точки кривой γ кроме концов.

Лемма 5. *Пусть точки* z_1, z_2 *односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$ *таковы, что множество* $\mathbb{C} \setminus D \setminus [z_1, z_2]$ *не является полуконтинуумом и пусть* S *— объединение его* *ограниченных связных компонент. Если голоморфная в D функция f имеет в $\overline{S}$ простой полюс в точке $a \in \overline{S} \setminus [z_1, z_2]$ и не имеет в $\overline{S}$ других особенностей, а уравнение $Ly = f$ разрешимо в $H(D)$, то* $\Big\{ \beta \in [\chi] : \mathrm{Re}\Big(\dfrac{z_1 - a}{\beta}\Big) > 0,\ \mathrm{Re}\Big(\dfrac{z_2 - a}{\beta}\Big) > 0 \Big\} = \varnothing.$

Доказательство леммы 5. Пусть γ - простая кривая в D с концами a и b. Обозначив $B[\cdot]$ преобразование Бореля функций, голоморфных вне компактного множества и равных нулю на бесконечности и c вычет функции f в точке a, заметим, что в окрестности бесконечно удаленной точки функция $I_\gamma[f - \dfrac{c}{z-a}]$ совпадает с $\psi_1 = I_{[a,b]}[f - \dfrac{c}{z-a}]$, которая голоморфна вне нашего отрезка. Левая часть цепочки равенств

$$\chi(\zeta)B[I_\gamma[y]](\zeta) = B[LI_\gamma[y]](\zeta) = B[I_\gamma[f]](\zeta) - B[\psi](\zeta) = ce^{a\zeta} + B[\psi_1 - \psi](\zeta),$$

вытекающих из свойств преобразования Бореля и леммы 4, имеет все нули функции χ. Как заметил Ю.Ф. Коробейник [6], из теоремы Пойа вытекает, что второе слагаемое правой части в любом замкнутом угле с вершиной в начале координат, лежащем в $\{ \beta \in \Delta : \mathrm{Re}(\dfrac{z_1 - a}{\beta}) > 0,\ \mathrm{Re}(\dfrac{z_2 - a}{\beta}) > 0 \} \cup \{0\}$, экспоненциально убывает на бесконечности по сравнению с первым, поэтому лемма доказана.

Необходимость выполнения условия (2): пусть существует $\beta_0 \in [\chi] \setminus [\mathrm{Q}]$, т.е. существует точка $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Q$ с ограниченной конституантой в $(\alpha - \beta\overline{\mathbb{C}}_+) \setminus Q$. Возьмем $w_1 \in Q$ и $w_2 \in Q$ на границе полуплоскости так, что $\alpha \in [w_1, w_2]$.

Предположим, что уравнение $Ly = \frac{1}{z-\alpha}$ разрешимо в $H(Q)$. Это означает, что существует односвязная область $V' \supset Q$, в которой точки $z_1 = w_1 + \varepsilon\beta$, $z_2 = w_2 + \varepsilon\beta$ при некотором $\varepsilon > 0$ приводят к условию леммы 5.

Покажем необходимость выполнения условия (3). Если β_0 удовлетворяет условию (b_1) определения $S_+(Q)$, то в качестве окрестности U зафиксируем дополнение к замкнутому кругу, касающемуся границы Q в точке $z_0 - i\beta t \subset \partial Q \setminus Q$. Если же β_0 удовлетворяет условию (b_2), то в качестве окрестности берем дополнение к ветви гиперболы $\{ z_0 + \frac{1}{t}\beta - i\beta t, t \geqslant 0 \}$.

Пусть множество $[\chi]$ содержит сходящуюся справа к β_0 последовательность $\{\beta_k\}$. Обозначим b_k крайнюю в направлении $(-\beta_0)$ точку границы выбранной окрестности и рассмотрим уравнение $Ly = f_0(z)$ с правой частью $f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{z - b_k}$. Предположим, что оно разрешимо в пространстве $H(Q)$. Для любой окрестности $U \supset Q$ при достаточно больших k нетрудно выбрать точки z_1 и z_2, позволяющие применить лемму 5.

Необходимость выполнения условия (4) показывается аналогично.

Условие $LH(Q) = H(Q)$ по определению $H(Q)$ означает, что каждая окрестность $U \supset Q$ содержит меньшую окрестность $V \supset Q$, для которой уравнение (*) имеет решение $y \in H(V)$ для любой $f \in H(U)$. Поскольку $H(U) \subset H(V)$, то нам остается доказать

Предложение 3. *В условиях (1–4) теоремы 6 каждая окрестность $U \supset Q$ содержит окрестность $V \supset Q$, для которой $LH(V) = H(V)$.*

Для произвольного множества $Q \subset \mathbb{C}$ определим на Δ *опорную функцию* $h(Q, z, \beta) = \sup\limits_{w \in Q} \mathrm{Re}\,\frac{w-z}{\beta}$ множества Q *относительно точки* $z \in \mathbb{C}$ — расстояние от опорной прямой в направлении β, взятое со знаком "$-$" в содержащей Q полуплоскости. Каждому $\beta \in \Delta$ поставим в соответствие множество $\partial_\beta(Q) = \{z \in Q : h(Q, z, \beta) = 0\}$ крайних в направлении β точек и обозначим $B_0(Q) = \{\beta \in \Delta : \partial_\beta(Q) = \varnothing\}$ множество направлений, в которых нет ни одной крайней точки.

Окрестность V мы строим в два этапа.

Лемма 6. *В условиях теоремы 6 для любой окрестности $U \supset Q$ существуют такая содержащаяся в ней область $V' \supset Q$ и такие определенные для каждого $\beta \in [\chi] \setminus B_0(Q)$ наборы точек $\{w_\beta\} \subset \partial_\beta(V')$ и $\{z_\beta\} \subset \partial_\beta(Q)$, что*

(1) $B_0(Q) \cap [\chi] \subset B_0(V')$,

(2) *полуинтервал $I_\beta = [z_\beta, w_\beta)$ прямой, проходящей через z_β и w_β, целиком лежит в V'.*

Доказательство леммы 6. Упростим запись расстояния между множествами

$$\mathrm{Dist}(A,B) = \min_{a\in A, b\in B} |a-b|,$$

положив по определению $\mathrm{Dist}(A,b) = \mathrm{Dist}(A,\{b\})$ и $\mathrm{Dist}(a,B) = \mathrm{Dist}(\{a\},B)$.

На множестве $[\chi]$ определим функцию $\rho(\beta)$ следующим образом:

1. если $\partial_\beta(Q) = \varnothing$, то $\rho(\beta) = 0$;
2. если $\partial_\beta(Q)$ — точка или отрезок, то пусть $\rho(\beta) = \mathrm{Dist}(\partial_\beta(Q), \partial U)$;
3. если $\partial_\beta(Q)$ — интервал или полуинтервал, то обозначим z_β некоторую его точку и пусть $\rho(\beta) = \mathrm{Dist}(z_\beta, \partial U)$ (для полуинтервала z_β — принадлежащий ему конец, для конечного интервала — середина, для бесконечного интервала — произвольная точка).

Покажем, что $\rho(\beta)$ полунепрерывна снизу на множестве $[\chi]$. Для этого достаточно убедиться, что при $\beta \in [\chi]$, приближающихся к β_0, отрезок $\partial_\beta(Q)$ целиком попадает в сколь угодно малую окрестность $\partial_{\beta_0}(Q)$.

В случае, когда $\partial_{\beta_0}(Q) = \varnothing$ или β_0 — направление невыпуклости и слева, и справа, полунепрерывность снизу в этой точке тривиальна.

Пусть теперь $\partial_{\beta_0}(Q) = \partial_{\beta_0}(\overline{Q}) \neq \varnothing$ — точка или отрезок. Тогда β_0 не может являться направлением невыпуклости ни слева, ни справа. Так как компакт $\partial_{\beta_0}(Q)$ содержится в открытом множестве U, то выполняется неравенство $\rho(\beta_0) > 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим $\sigma = \rho(\beta_0) - \varepsilon$, пусть $\mathcal{B}_\sigma(\partial_{\beta_0}(Q))$ — σ-раздутие $\partial_{\beta_0}(Q)$. Далее определим множество $V_\sigma(Q) = \{\, \beta \in [\chi] : \partial_\beta(Q) \not\subset \mathcal{B}_\sigma(\partial_{\beta_0}(Q)) \,\}$. Ясно, что $\beta_0 \notin V_\sigma(Q)$. Если $V_\sigma(Q) = \varnothing$, то для любого направления $\beta \in [\chi]$ справедливо включение $\partial_\beta(Q) \subset \mathcal{B}_\sigma(\partial_{\beta_0}(Q))$. Если же $V_\sigma(Q) \neq \varnothing$, то обозначим

$$\beta_0^{\pm} = \beta_0 \cdot e^{\pm i \inf\{\, \theta > 0 : \beta_0 \cdot e^{\pm i\theta} \in V_\sigma(Q)\,\}}$$

и пусть $\delta = \min\{\, |\beta_0 - \beta_0^+|, |\beta_0 - \beta_0^-| \,\}$.

Тогда при $|\beta - \beta_0| < \delta$ выполняется включение $\partial_\beta(Q) \subset \mathcal{B}_\sigma(\partial_{\beta_0}(Q))$.

Если направление β_0 является направлением невыпуклости только слева (справа), то для данного $\varepsilon > 0$ при $\beta_0 - \beta < |\beta_0 - \beta_0^-|$ (соответственно $\beta - \beta_0 < |\beta_0 - \beta_0^+|$) требуемое включение также справедливо.

Доказанная нами полунепрерывность снизу $\rho(\beta)$ на множестве $[\chi]$ позволяет рассмотреть в $\mathbb{C}$ функцию $f(z) = \min\limits_{\beta\in[\chi]} (h(Q,z,\beta) + \rho(\beta))$ и в качестве искомой окрестности V' взять содержащую Q связную компоненту пересечения U с выпуклым открытым множеством $\{z \in \mathbb{C} : f(z) > 0\}$. Справедливость леммы следует из неравенства $f(z) \le \rho(\beta)$ для $z \in \partial_\beta(Q)$ и равенства $|f(z)| = \mathrm{Dist}(z, \partial V')$.

Пусть V' — окрестность, удовлетворяющая условиям леммы. Тогда из теоремы 5 следует существование для каждой точки $w \in \partial V'$ и для каждого направления $\beta \in [\chi]$ в области V' непрерывной однозначной ветви $\psi(z,\beta,w)$ функции $\arg(\frac{z-w}{\beta})$, принимающей на $Q_\beta = Q \cup I_\beta$ значения из интервала $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Обозначим

$$\sigma(w) = \frac{|h(V',w,\beta)|}{1 + |h(V',w,\beta)|}, \qquad w \in \partial V', \beta \in [\chi].$$

Ясно, что если w — крайняя в направлении β, то $\sigma(w)=0$; если w бесконечно удалена от опорной к V' прямой в направлении β, то $\sigma(w)=1$; для всех остальных точек $w\in\partial V'$ значения $\sigma(w)$ принадлежат интервалу $(0,1)$.

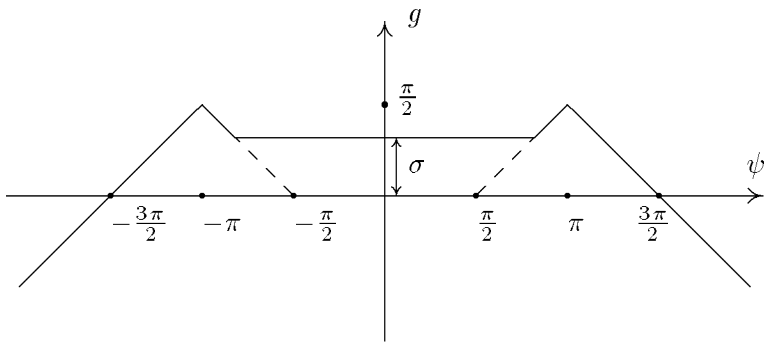
Далее, пусть

$$g(\psi)=\begin{cases}\frac{3\pi}{2}-|\psi|, & \text{если } |\psi|\geqslant\pi,\\ \max\{|\psi|-\frac{\pi}{2},\sigma\}, & \text{если } |\psi|<\pi,\end{cases}$$

где $\psi=\psi(z,\beta,w)$, $\sigma=\sigma(w)$.

Следует отметить, что если w является крайней в направлении β, то возникает возможность "двоякого" выбора ветви ψ на Q — со значениями из интервала $(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. В этом случае значения ψ в точках z, близких к w, зависят от выбора ветви (могут отличаться по модулю на π). Однако значения $g(\psi)$ в этих точках совпадают, т.е. $g(\psi)$ определяется однозначно.

Докажем, что функция $f(z)=\inf\limits_{\beta\in[\chi],w\in\partial V'}g(\psi)$ непрерывна на V'.



Из графика функции $g(\psi)$ нетрудно увидеть, что она удовлетворяет условию Липшица: $|g(\psi_1)-g(\psi_2)|\leqslant|\psi_1-\psi_2|$. Далее заметим, что для любой точки $(\beta,w)\in[\chi]\times\partial V'$ функция $\psi(z,\beta,w)$ является функцией Липшица по переменной z в окрестности точки z_0 радиуса $\frac{1}{2}|z_0-w_0|$ с постоянной $\Psi_L=\frac{2}{|z_0-w_0|}$, не зависящей от β и w.

Так как композиция липшицевских функций есть липшицевская функция с константой, равной произведению констант Липшица исходных функций, то $g(\psi)$ в выбранной окрестности точки z_0 также удовлетворяет условию Липшица. Тогда и функция $f(z)$ есть функция Липшица в рассматриваемой окрестности, поэтому непрерывна на всем множестве V'. Множество $V=\{z\in V':f(z)>0\}$ открыто как прообраз открытого множества при непрерывном отображении.

Из построения V и определения функции $f(z)$ следует ее положительность на множестве $V\times[\chi]\times\partial V$. Это означает, что для любого направления $\beta\in[\chi]$ и для любой точки $w\in\partial V$ на V выполняется неравенство $|\psi(z,\beta,w)|<\frac{3\pi}{2}$, т.е. V выпукло в направлениях из $[\chi]$ относительно каждой граничной точки. Предложение 2 и достаточное условие разрешимости уравнения (*) для области ([7]) завершают доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Мальцев И. М. Эпиморфизм оператора свертки в пространствах функций, аналитических на связных множествах // Докл. РАН. 1994. Т. 336. №3. С. 297–300.

[2] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

[3] Шрайфель И. С. Об эквивалентности понятий базисной односвязности и квазиконтинуальности. // Тезисы докладов международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5-11 сентября 1998 г. Ростов-на-Дону, 1998. С. 139.

[4] Köthe G. Dualitat in der Functionentheorie // J. reine und amgew. Math. 1953. V. 191. P. 30–49.

[5] Grothendieck A. Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I // J. reine und amgew. Math. 1953. V. 192. №1,2. P. 35–64, 77–95.

[6] Коробейник Ю. Ф. Существование аналитического решения дифференциального уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности // Мат. сб. 1969. Т. 80. №1. С. 52–76.

[7] Знаменский С. В. Об областях существования аналитических решений дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Препринт ИФСО-3М. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976.

[8] Знаменский С. В. Нетрадиционная выпуклость в направлении плоских областей и компактов и свойства голоморфных решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Деп. в ВИНИТИ, №3063-80 Деп, 1980.

[9] Епифанов О. В. Критерий эпиморфности оператора свертки в произвольных областях комплексной плоскости // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №5. С. 695–705.

[10] Епифанов О. В. Уравнения свертки в комплексной плоскости // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 48–58.

[11] Коробейник Ю. Ф. О разрешимости уравнения свертки в некоторых классах аналитических функций // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №2. С. 74–83.

[12] Напалков В. В. Оператор свертки в пространствах вещественно-аналитических функций // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №3. С. 57–65.

[13] Мальцев И. М. Об эпиморфности свертки в пространствах ростков функций, аналитических на связных множествах из $\overline{\mathbb{C}}$. Деп. в ВИНИТИ, №1241-В92, Деп, 1992.

[14] Мальцев И. М. Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Необходимость. // Изв. вузов. Математика. 1994. №7. С. 49–58.

[15] Мальцев И. М. Об условиях эпиморфности оператора свертки в комплексной области. Достаточность. // Изв. вузов. Математика. 1994. №11. С. 43–52.