УДК 517.55+513

# Комплексная проективная выпуклость

**Знаменский С. В., Знаменская Л. Н.**

Сравниваются расстояния в различных направлениях до границы линейно выпуклых и также сильно линейно выпуклых множеств. Найденные оценки позволяют выяснить инвариантность линейной и особенно сильной линейной выпуклости относительно операций взятия внутренности, замыкания и перехода к пределу последовательности множеств, а также топологически классифицировать проективно выпуклые множества в $\mathbb{CP}^n$. Библиография 22 назв.

## §1. Линейная и сильная линейная выпуклости

Понятие линейной выпуклости[1] возникло в $30^{x}$ [1] как естественная попытка построить такой комплексный аналог выпуклости, в котором роль прямых и плоскостей играли бы комплексные плоскости и прямые. Поскольку прямые и плоскости в аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ однозначно продолжаются до прямых и плоскостей в его проективной компактификации $\mathbb{CP}^n \supset \mathbb{C}^n$, то линейную выпуклость наиболее естественно рассматривать в проективном комплексном пространстве.

*Комплексное проективное пространство* $\mathbb{CP}^n$ определяется как множество линейных одномерных подпространств в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$. Будем обозначать буквой $p$ каноническое отображение $\mathbb{C}^{n+1}$ на $\mathbb{CP}^n$. Аналогичное отображение пространства $\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)^*$ линейных на $\mathbb{C}^{n+1}$ функционалов на *дуальное проективное пространство* $\mathbb{CP}^{n*}$ будем обозначать той же буквой.

Комплексная билинейная форма $\langle z, w\rangle = w(z)$, на $\mathbb{C}^{n+1} \times \left(\mathbb{C}^{n+1}\right)^*$, устанавливает по обычному правилу

$$l^{\perp} = \{\, z : \langle z, w\rangle = 0 \quad \forall w \in l\,\}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 93-011-258, № 93-011-140

взаимно-однозначное *отношение ортогональности* между линейными подпространствами дополнительной размерности в $\mathbb{C}^{n+1}$ и $\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)^*$. Отсюда происходит известное *соответствие двойственности* $(p(l))^\star = p(l^\perp)$ между плоскостями в $\mathbb{CP}^n$ и $\mathbb{CP}^{n*}$, сумма размерностей которых равна $n-1$. В частности, любой точке $z \in \mathbb{CP}^n$ канонически соответствует гиперплоскость $z^\star$ и наоборот, что позволяет говорить о гиперплоскостях как о точках дуального пространства.

А. Мартино назвал [2] множество *линейно выпуклым (linéellement convexe)* если через каждую точку его дополнения проходит гиперплоскость, его не задевающая. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{CP}^n$ множество

$$E^* = \{\, w \in \mathbb{CP}^{n*} : E \cap w^\star = \varnothing \,\}$$

гиперплоскостей, не заходящих в $E$, принято называть *сопряженным* к $E$. Из эквивалентного определения

$$E^* = \mathbb{CP}^{n*} \setminus \bigcap_{z \in E} z^\star$$

явно видно, что $E^*$ линейно выпукло. Множество $E^{**} = (E^*)^* \supset E$ будем называть *линейно выпуклой оболочкой* множества $E$. Эта оболочка есть наименьшее линейно выпуклое множество, содержащее $E$.

Прилив интереса к линейно выпуклым множествам, начавшийся в $60^x$, связан с проблемой описания линейных функционалов на пространстве $H(D)$ функций, аналитических в области $D \subset \mathbb{C}^n$, задачами о разделении особенностей, о разложении на простейшие дроби, о разрешимости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и уравнений свёртки, об аппроксимации Кергина и о томографии в пространстве аналитических функционалов и некоторыми другими задачами (см., например, обзор [3] и литературу в нём, [4], [5]), формулировка и обсуждение которых далеко выходит за рамки этой статьи. Во всех этих задачах простой ответ оказался лишь в классе *сильно линейно выпуклых* множеств, то есть таких линейно выпуклых областей или компактов, сечения которых комплексными прямыми ацикличны [6–8] (ацикличность открытого или компактного множества на комплексной проективной прямой означает непустоту и связность как самого множества, так и его дополнения). Это понятие оказалось настолько естественным комплексным аналогом обычной выпуклости, что шведские математики стали называть его более лаконично — $\mathbb{C}$-*выпуклостью* [5,9].

Все ограниченные линейно выпуклые области с гладкой границей [10], а также все выпуклые области и компакты в $\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}$-выпуклы. Как и линейная выпуклость, $\mathbb{C}$-выпуклость сохраняется при автоморфизмах $\mathbb{CP}^n$.

Декартово произведение односвязных областей в $\mathbb{C}^2$ дает простые примеры линейно выпуклой, но не выпуклой области. Привести пример $\mathbb{C}$-выпуклой, но не выпуклой области намного сложнее: среди декартовых произведений ограниченных областей $\mathbb{C}$-выпуклы только выпуклые [11], а известные примеры [12–14] линейно выпуклых областей с гладкими границами громоздки и визуально почти не отличаются от выпуклых. Более того, все такие области гомеоморфны шару [10]. Наглядный пример ограниченной невыпуклой $\mathbb{C}$-выпуклой области легко получить, применяя автоморфизм $\mathbb{CP}^n$ к выпуклой области:

**Пример ограниченной невыпуклой линейно выпуклой области с гладкой границей.** Отображение $w_k = z_k/z_1 - 1$ переводит эллипсоидальную окрестность

$$\{\, z : |z|^2 - 0.9(\operatorname{Im} z_1)^2 < 0.2 \,\}$$

отрезка $\{\,(it, 0, \dots, 0) : -1 < t < 1\,\}$ в окрестность

$$D = \left\{ w : \frac{|w|^2}{|w_1 - 1|^2} - 0.9(\operatorname{Im}(\frac{w_1}{w_1 - 1}))^2 < 0.2 \right\}$$

дуги окружности $\{\,(0.5e^{i\varphi} + 0.5, 0, \dots, 0) : \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2\,\}$. В результате получается ограниченная линейно выпуклая область $D$ с алгебраической границей. Она не выпукла, поскольку не содержит середины $(1/2, 0, \dots, 0)$ отрезка, соединяющего концы этой полуокружности.

## §2. Оценка линейно выпуклых множеств изнутри

Если выпуклое множество содержит какие-то точки, то оно содержит ещё и выпуклую оболочку этих точек, которая легко описывается. К сожалению, формальное введение линейно выпуклой оболочки не дало ответа даже на простой вопрос: если линейно выпуклое множество содержит шар и точку вне него, то должно ли оно содержать ещё что-либо?

**Предложение 2.1.** *Пусть образ линейно выпуклого компакта $K \subset \mathbb{CP}^n$ относительно любой дробно-линейной функции нигде не плотен. Тогда его объединение с произвольным линейно выпуклым компактом $K' \subset \mathbb{CP}^n$ снова линейно выпукло.*

**Доказательство.** Пусть $z \in \mathbb{CP}^n \setminus (K \cup K')$. Из линейной выпуклости компактов $K$ и $K'$ через $z$ проходит плоскость $l$ коразмерности 2, не заходящая ни в один из них. Пусть $f$ — невырожденная дробно-линейная функция на $\mathbb{CP}^n \setminus l$. Непустое открытое множество $\mathbb{CP}^1 \setminus f(K)$ по условию не может покрываться образом $K'$, а прообраз точки из $\mathbb{CP}^1 \setminus f(K \cup K')$ есть искомая гиперплоскость, проходящая через $z$ и не пересекающая $K \cup K'$.

**Следствие 2.2.** *Объединение любого компакта $K$ нулевой двумерной меры Хаусдорфа с произвольным линейно выпуклым компактом $K' \subset \mathbb{CP}^n$ снова линейно выпукло.*

**Доказательство.** Для применимости предложения 2.1 нужно лишь убедиться в линейной выпуклости K. Поскольку при $n = 1$ каждый компакт линейно выпуклый, то будем доказывать для $n = k$ индукцией по размерности пространства считая линейную выпуклость компактов нулевой двумерной меры Хаусдорфа известной для $n = k - 1$. Пусть $z \notin K$. Рассмотрим естественное отображение $f : \mathbb{CP}^n \setminus \{z\} \longmapsto \mathbb{CP}^{n-1}$. По предположению индукции существует гиперплоскость в $\mathbb{CP}^{n-1} \setminus f(K)$. Её прообраз и есть искомая гиперплоскость.

Эти утверждения подсказывают, что простейшим множеством, для которого может быть получена оценка линейно выпуклой оболочки, может оказаться объединение вещественно-двумерных дисков. По аналогии с шаром

$$U_r(a) = \{\, z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r \,\}$$

радиуса $r$ с центром в $a$ будем для вектора $w \in \mathbb{C}^n$ обозначать

$$U_w(a) = \{\, tw + a : t \in U_1(0) \,\} \in \mathbb{C}^n$$

*диск вдоль* $w \in \mathbb{C}^n$ *с центром в точке* $a$.

**Предложение 2.3.** *Пусть линейно выпуклое множество* $F \subset \mathbb{CP}^n$ *содержит диски* $U_v(a)$ *и* $U_w(a+tv)$. *Тогда оно содержит диск* $U_{\tau w}(a)$ *при* $\tau = 1/|t|+1$

Сформулированное утверждение легко извлечётся из последующего утверждения, связывающего между собой расстояния в различных направлениях от двух точек линейно выпуклого множества до его дополнения. Применяя его к дискам, содержащимся в заданных, можно слегка усилить это утверждение:

**Следствие 2.4.** *Пусть линейно выпуклое множество* $F \subset \mathbb{CP}^n$ *содержит диски* $U_v(a)$ *и* $U_w(a+tv)$. *Тогда оно содержит множество*

$$\{\, a + \zeta_1 v + \zeta_2 w : (1 - |\zeta_1|) > (|t|+1)|\zeta_2|\backslash . \}.$$

Подобно тому, как евклидово расстояние

$$|a-b| = \inf\{\, r \geqslant 0 : b \in U_r(a) \,\}$$

связано с единичным шаром, свяжем с диском $U_w(a)$ *расстояние вдоль вектора* $w$:

$$\rho_w(a,b) = \inf\{\, |t| : b \in U_{tw}(a), \quad t \in \mathbb{C} \} \leqslant +\infty.$$

Более общо, для произвольных множества $W$, $A$ и $B$ определим *расстояние вдоль семейства* $W$:

$$\rho_W(A,B) = \inf\{\, \rho_w(a,b) : w \in W, \quad a \in A, \quad b \in B \,\},$$

так, что $|a-b| = \rho_{U_1(0)}(a,b)$. Здесь и далее мы считаем, что функция $\rho$ действует на элементах $\mathbb{C}^n$ как на одноэлементных множествах. Легко видеть, что $\rho_W(0,z)$ положительно однородна при любом $W$ и выпукла, если последнее выпукло.

Заметим, что расстояние вдоль вектора единичной длины от точки до множества есть не что иное, как евклидово расстояние от этой точки до сечения множества комплексной прямой с этим направляющим вектором.

**Предложение 2.5.** *Для любых точек $a$ и $b$ линейно выпуклого множества $F$ с дополнением $A=\mathbb{C}^n\setminus F$, и произвольных множеств $W\subset\mathbb{C}^n$ и $V\subset\mathbb{C}^n$ выполняется оценка*

$$\frac{\rho_W(b,A)}{\rho_W(a,A)}\leqslant 1+\frac{\rho_V(a,b)}{\rho_V(a,A)}.$$

**Доказательство.** Предположим противное: пусть

$$\frac{\rho_W(b,A)}{\rho_W(a,A)}> 1+\frac{\rho_V(a,b)}{\rho_V(a,A)}+\varepsilon.$$

Это означает, что при некотором $\zeta\in A$ выполняется

$$\frac{\rho_W(\zeta,a)}{\rho_W(a,A)}<1+\varepsilon \quad \text{и} \quad \frac{\rho_W(b,A)}{\rho_W(a,\zeta)}> 1+\frac{\rho_V(a,b)}{\rho_V(a,A)}.$$

В силу линейной выпуклости существует гиперплоскость $h$, проходящая через $\zeta$ вне $F$. Предположим, что она пересекается с комплексной прямой, проходящей через $b$ и $a$, в точке $c$. Выберем систему координат в $\mathbb{C}^n$ так, чтобы $c=0$ и $t\in\mathbb{C}$ так, чтобы $b=ta$. Поскольку $t\zeta\in A$, то $\rho_W(b,t\zeta)>\rho_W(b,A)$. С другой стороны, $\rho_V(a,A)<\rho_V(a,0)=\rho_V(a)$. Таким образом,

$$\frac{\rho_W(ta,t\zeta)}{\rho_W(a,\zeta)}> 1+\frac{\rho_V(0,ta-a)}{\rho_V(0,a)},$$

откуда $|t|>1+|1-t|$, что невозможно. Если же, наконец, $h$ не пересекается с комплексной прямой, проходящей через $a$ и $b$, то точка $\zeta-a+b$ лежит в $h\subset A$, откуда

$$\frac{\rho_W(b,A)}{\rho_W(a,A)}\leqslant\frac{\rho_W(b,\zeta-a+b)}{\rho_W(a,A)}=\frac{\rho_W(\zeta,a)}{\rho_W(a,A)}<1+\varepsilon,$$

что также противоречит нашему предположению.

**Следствие 2.6.** *Пусть диски $U_v(a)$ и $U_w(b)$ лежат в сечении $l\setminus F$ линейно выпуклого множества $F\subset\mathbb{CP}^n$ комплексной прямой $l\subset\mathbb{CP}^n$. Тогда расстояния $r_a$ и $r_b$ от центров дисков до $F$ связаны неравенствами*

$$\frac{|w|}{|w|+|b-a|}\leqslant\frac{r_b}{r_a}\leqslant 1+\frac{|b-a|}{|v|}.$$

Следующее утверждение является точным аналогом того факта, что секущая не может содержать отрезка границы выпуклой области.

**Следствие 2.7.** *Пусть $A \subset \mathbb{CP}^n$ — дополнение к линейно выпуклому компакту $K$, а $l \subset \mathbb{CP}^n$ — комплексная прямая, проходящая через внутреннюю точку $a$ компакта $K$. Тогда $\overline{l \cap A} = l \cap \overline{A}$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что $K \subset \mathbb{C}^n$. Очевидно, $\overline{l \cap A} \subset l \cap \overline{A}$. Нужно показать, что произвольная $b \notin \overline{l \cap A}$ не лежит в $l \cap \overline{A}$. В самом деле, пусть $W = U_1(0)$ и $W' = \{w\}$, где $w$ — направляющий вектор прямой $l$. Тогда $\rho_W(a, A) > 0$, $\rho_w(b, A) > 0$ и по предложению 2.5 расстояние $\rho_W(b, A)$ отделено от нуля, т.е. $b$ — внутренняя точка компакта $K$.

## §3. Оценка $\mathbb{C}$-выпуклых множеств извне

Любая граничная точка выпуклого множества и любая прямая, проходящая через эту точку и некоторую внутреннюю точку множества обязательно являются вершиной и осью некоторого прямого кругового конуса, не задевающего множество. Раствор этого конуса легко оценивается через расстояние от этой внутренней точки до дополнения.

Для линейно выпуклых множеств подобная оценка невозможна, что явствует из примера в начале предыдущего параграфа: добавление произвольной точки дополнения не лишает компакт линейной выпуклости. Однако для $\mathbb{C}$-выпуклых множеств может быть получена оценка извне, вполне аналогичная оценке изнутри:

**Предложение 3.1.** *Пусть $\mathbb{C}$-выпуклое множество $F \subset \mathbb{CP}^n$ не пересекает диск $U_v(a)$, но содержит диск $U_w(a+tv)$. Тогда оно не пересекает множество*

$$\{\, a + \zeta_1 v + \zeta_2 w : (1 - |\zeta_1|) > (|t| + 1)|\zeta_2| \,\}.$$

Как и в предыдущем параграфе, будем доказывать более общее утверждение:

**Предложение 3.2.** *Для любых точек $b \in \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n$ $\mathbb{C}$-выпуклого множества $F \subset \mathbb{CP}^n$ и $a$ из $A = \mathbb{C}^n \setminus F$ и произвольных множеств $V, W \subset \mathbb{C}^n$ выполняется оценка*

$$\frac{\rho_W(b, A)}{\rho_W(a, F)} \leqslant 1 + \frac{1}{\rho_{a-b}(a, F)} \leqslant 1 + \frac{\rho_V(a, b)}{\rho_V(a, F)}.$$

**Доказательство** основано на лемме:

**Лемма 3.3.** (*о ветви аргумента*). *Пусть $E$ — открытое или компактное множество в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(C1) *точка* $0$ *лежит в неограниченной связной компоненте* $\mathbb{C} \setminus E$;

(O1) *на $E$ существует однозначная непрерывная ветвь $\Psi_E$ функции* $\arg z$.

**Доказательство.** (C1)$\Rightarrow$(O1). Если $E$ открыто, то добавляя к $E$ ограниченные связные компоненты дополнения, получаем дизъюнктное объединение односвязных областей $\bigcup \widehat{E}_i$, а в каждой односвязной области искомая ветвь существует. Если же $E$ компактно, то в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ существует простая кривая, соединяющая 0 и $\infty$. Дополнение к этой кривой есть односвязная область, содержащая $E$. Таким образом (O1) выполнено.

(O1)$\Rightarrow$(C1). Предположим противное: (O1) выполнено, а (C1) не выполнено. Пусть $\psi(z) = \ln|z| + i\Psi_E(z)$ — однозначная голоморфная на $E$ функция, а $T \in H'(\overline{\mathbb{C}} \setminus E)$ — соответствующий ей по двойственности Кёте-Гротендика-Себастьяо-да-Сильва аналитический функционал, т.е. такой функционал, что $\psi(w) = T(\frac{1}{z-w})$. Функционал $-T'$ соответствует функции $\psi'(z) = 1/z$ и поэтому $-T'(f) = f(0)$. По определению связной компоненты $\overline{\mathbb{C}} \setminus E = F_0 \cup F_\infty$, где $0 \in F_0$, $\infty \in F_\infty$ и $\overline{F_0} \cap \overline{F_\infty} = \varnothing$. Обозначим через $f$ функцию тождественно равную единице на $F_0$ и нулю на $F_\infty$. Тогда

$$1 = f(0) = -T'(f) = -T(f') = -T(0) = 0.$$

Противоречие доказывает лемму.

Продолжим доказательство предложения 3.2. Правое неравенство вытекает из очевидных соотношений

$$\rho_{a-b}(a, F) = \frac{\rho_V(a, \widehat{F})}{\rho_V(a, b)}$$

и $\rho_V(a, F) \leqslant \rho_V(a, \widehat{F})$, где $\widehat{F}$ есть пересечение $F$ с прямой, проходящей через $b$ и $a$.

Для доказательства левого неравенства выберем систему координат в $\mathbb{C}^n$ так, чтобы $a = 0$, $b = (1, 0, \ldots, 0)$ и положим $V = \{b\}$, при этом $\rho_V(a, b) = 1$. Тогда окружности

$$\gamma_m = \{\, z : (1 + m)\rho_b(0, z) = m\rho_b(0, F)\,\}$$

лежат в $A$. Обозначим $\Sigma_m$ объединение всех гиперплоскостей, пересекающих $\gamma_m$ и лежащих в $A$. Множество $\mathbb{C}^n \setminus \Sigma_m = E$ линейно выпукло, а, следовательно, по предложению 2.5

$$\frac{\rho_W(b, \Sigma_m)}{\rho_W(a, \Sigma_m)} \leqslant 1 + \frac{1}{\rho_V(a, \Sigma_m)}. \tag{1}$$

Поскольку $E$ содержит $F$, то $\rho_W(b, \Sigma_m) \geqslant \rho_W(b, A)$ и, по определению $\gamma_m$,

$$\rho_V(a, \Sigma_m) \leqslant \rho_V(a, \gamma_m) = \frac{m}{m+1}\rho_V(a, F).$$

Если теперь показать, что $\rho_W(a, \Sigma_m) \leqslant \rho_W(a, F)$ то искомое неравенство станет следствием (1). Итак требуется доказать, что шар

$$B = \{\, z : \rho_W(0, z) < \rho_W(a, \Sigma_m)\,\}$$

не содержит точек $F$. Зафиксируем произвольную точку $c \in B$. Пусть $s$ — комплексная прямая, проходящая через точки $b$ и $c$. Формально возможны два случая.

(I). *Точки $b$ и $c$ лежат в различных связных компонентах $s \setminus E$.* В этом случае $c$ не может принадлежать $F$, поскольку $F \subset E$, а $s \cap F$ связно. Покажем, что иного не бывает, от противного: пусть

(II). *Точки $b$ и $c$ лежат в одной связной компоненте $s \setminus E$.* Тогда точки $b$, $a$, $c$ не лежат на одной прямой и, следовательно, существует дробно-линейная функция $f$, переводящая $a$ и $c$ в $0$, $b$ в $\infty$, а $(0, 1, 0 \ldots, 0)_0 \in \mathbb{CP}^n$ — в $1$. Теперь по лемме 3.3 можно выделить на $f(s \setminus E)$ однозначную непрерывную ветвь $\Psi_1$ функции $\ln z$.

Для любой гиперплоскости $h$, пересекающей $\gamma_m$, точки $h \cap \gamma_m = d_1$ и $h \cap s = d_2$ таковы, что отрезок $[\,f(d_1), f(d_2)\,]$ не содержит нуль. В противном случае элементарные выкладки показывают, что отрезок $[0, c]$ пересекался бы с комплексной прямой, проходящей через точки $d_1$ и $d_2$, что невозможно, так как $[0, c] \subset B \subset E$ и $[f(d_1), f(d_2)] \cap E = \varnothing$. Поэтому значение $\Psi_1(f(d_1))$ функции $\ln f(z)$ однозначно аналитически продолжается по отрезку $[0, c]$ до функции $\varphi(d_2)$. Зафиксировав $d_1$ и меняя $h$ мы получим из односвязности проекций $\mathbb{C}$-выпуклого множества (см., например, [15]) связное множество точек $d_2$, так что выбранное значение как непрерывная функция от $d_2$ с дискретным множеством значений является константой. Непрерывность $\varphi$ вытекает из построения. Применяя лемму 3.3 к множеству $f(s \cap \Sigma_m)$, получаем (1).

**Следствие 3.4.** *Пусть $F \subset \mathbb{CP}^n$ — $\mathbb{C}$-выпуклое множество, комплексная прямая $l \subset \mathbb{CP}^n$ пересекает его и содержит диски радиусов $R_a$ и $R_b$ с центрами в точках $a$ и $b$ соответственно, причём первый из них целиком лежит в $F$, а другой - в его дополнении. Тогда расстояния $r_a$ и $r_b$ от центров дисков до $\mathbb{C}^n \setminus F$ и $F$ соответственно связаны неравенством*

$$\frac{r_a}{r_b} \leqslant 1 + \frac{|b-a|}{R_b}.$$

На примере произведения кольца на круг нетрудно убедиться в том, что аналогичное утверждение неверно для линейно выпуклых множеств.

**Следствие 3.5.** *Пусть $D \subset \mathbb{CP}^n$ $\mathbb{C}$-выпуклая область, $s$ — комплексная прямая, пересекающая $D$. Тогда $\overline{D \cap s} = \overline{D} \cap s$.*

**Следствие 3.6.** *Пусть комплексная гиперплоскость $h$ проходит через граничную точку $\zeta \in \partial D$ $\mathbb{C}$-выпуклой области $D \subset \mathbb{CP}^n$ и в некоторой окрестности точки $\zeta$ не заходит внутрь области. Тогда $h \cap D = \varnothing$.*

## §4. Контрпримеры про внутренность и замыкание $\mathbb{C}$-выпуклых множеств

Известные свойства $\mathbb{C}$-выпуклости [6, 8, 10, 15] и результаты предыдущего параграфа могут создать обманчивое впечатление, что $\mathbb{C}$-выпуклые множества, подобно выпуклым, топологически не отличаются от шаров. Следующие примеры показывают, что это далеко не так. Оказывается, не только внутренность (непустая!) $\mathbb{C}$-выпуклого компакта не обязана быть $\mathbb{C}$-выпуклой областью и не только замыкание ограниченной $\mathbb{C}$-выпуклой области не обязано быть $\mathbb{C}$-выпуклым компактом, но и комбинация этих операций над множествами может не сохранить $\mathbb{C}$-выпуклость.

**Пример $\mathbb{C}$-выпуклого компакта, замыкание внутренности которого несвязно..** Обозначим

$$M = U_1(0) \setminus \left( \bigcup_{w^4=-1/4} U_{1/2}(w) \right) \setminus \{\, x+iy : |x| < 1/2, y \neq 0 \,\},$$
$$B = \{\, z \in \mathbb{C}^n : |z| \leqslant 1 \,\},$$
$$K = \{\, z \in B : z_1 \in M \,\}.$$

Сечение компакта $K$ произвольной комплексной прямой

$$s = \{\, (z, az+b) : z \in \mathbb{C} \,\}$$

изоморфно пересечению $M$ с замкнутым кругом, целиком лежащим в единичном круге

$$\{\, z : (z, az+b) \in K \,\} = M \cap \{\, z : (z, az+b) \in B \,\}.$$

Нетрудно видеть, что оно всегда связно и односвязно, поэтому $K$ $\mathbb{C}$-выпуклый компакт. Точки $(\pm 0.9, 0)$ лежат в различных связных компонентах замыкания внутренности.

**Пример $\mathbb{C}$-выпуклой области, внутренность замыкания которой неодносвязна..** Сопряженное множество $D = \widetilde{K}$ к компакту из предыдущего примера является $\mathbb{C}$-выпуклой областью, координатная проекция которой на $z_1$ совпадает с дополнением к образу $\{\, -1/z : z \in M \,\}$ множества $M$. Внутренность замыкания этой области содержит окружность

$$\{\, t \in \mathbb{C} : |t - 10| = 10 \,\},$$

но не пересекает гиперплоскость $\{\, z : z_1 = 1 \,\}$, зацепленную с этой окружностью.

## §5. Специфические оценки для $\mathbb{C}$-выпуклых множеств. Бесконечный вариант

Цель этого параграфа — подготовить необходимый аппарат для исследования вопроса о том, будет ли связная компонента внутренности $\mathbb{C}$-выпуклого компакта $\mathbb{C}$-выпуклой областью и в каком смысле можно переходить к пределу последовательности $\mathbb{C}$-выпуклых множеств. Это потребует оценок, гарантирующих, что пара точек окажется в одной связной компоненте $\varepsilon$-сжатия сечения при условии, что $\varepsilon$ достаточно мало.

Для $a \in \mathbb{C}^n$ будем называть $a$-диском с центром в точке $b \in \mathbb{C}^n$ множество $U_a(b) = \{\, \tau a + b : |\tau| < 1 \,\}$ и говорить, что $F$ выпускает $a$-диск из $b$, если связная компонента множества

$$S(a, b;\, F) = \{\, t \in \mathbb{C} : U_a(b + ta) \subset F \,\},$$

содержащая 0, неограничена.

**Предложение 5.1.** *Для линейно независимых $a, w \in \mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$-выпуклого $F$ в проективной компактификации $\mathbb{CP}^n$ пространства $\mathbb{C}^n$ справедливо, что если $F$ выпускает $a$-диск из $b \in \mathbb{C}^n$, а $\alpha^w(z - b) = 1 - r\rho_{\alpha^w}(b, \partial F)$, $r > 0$, то $F$ выпускает $ra$-диск из $z$.*

К сожалению, в отличие от обычной выпуклости, где в аналогичной ситуации можно явно описать большое подмножество $F$, здесь знание одного сечения и удалённости двух его точек от границы принципиально не даёт возможности выделить достаточно массивную часть множества. Для доказательства потребуются леммы:

**Лемма 5.2.** *Для линейно выпуклого множества $0 \in F \subset \mathbb{C}^n$ и выпуклого множества $U \subset \mathbb{C}$ множество*

$$F_U = \bigcap_{\tau \in \widetilde{U}} \{\, \tau z : z \in F \,\}$$

*выпукло.*

**Доказательство.** По определению линейной выпуклости
$$F = \bigcap_{\zeta\in\widetilde{F}} \widetilde{\{\zeta\}} = \bigcap_{\zeta\in\widetilde{F}} \{\, z : z\zeta + 1 \neq 0\,\}.$$

Отсюда
$$F_U = \bigcap_{\zeta\in\widetilde{F}} \widetilde{\{\zeta\}}_U = \bigcap_{\zeta\in\widetilde{F}} \{\, z : z\zeta \in U\,\}$$
выпукло как пересечение выпуклых множеств.

Полагая $U = U_1(0)$, получаем

**Следствие 5.3.** *Максимальное круговое множество (т.е. инвариантное относительно поворотов $z \mapsto e^{i\theta}z$), вписанное в линейно выпуклое множество, выпукло.*

**Лемма 5.4.** *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ множество со связным дополнением, содержащее единичный круг в неограниченной связной компоненте. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(C2) *$E$ выпускает 1-диск из нуля;*
(O2) *существует такая непрерывная ветвь $\Psi_E$ функции $\ln z$, что для любых $\zeta', \zeta'' \in \mathbb{C}\setminus E$ неравенство $|\zeta' - \zeta''| < 2$ влечет $|\Psi_E(\zeta') - \Psi_E(\zeta'')| < \pi$.*

**Доказательство.** Пусть сначала выполнено (O2). В силу леммы 3.3 нам достаточно выделить в $\mathbb{C}\setminus S(1,0;E)$ однозначную непрерывную ветвь $\Psi$ функции $\ln z$. Для любой $\zeta \in \mathbb{C}\setminus S(1,0;E)$ определим $\Psi(\zeta)$, пользуясь значением $\Psi$ в точке $\zeta' \in \mathbb{C}\setminus E$, для которой $|\zeta - \zeta'| < 1$, условием $|\mathrm{Im}(\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta'))| < \pi/2$. Это возможно поскольку $|\zeta| > 1$ и $|\zeta'| > 1$. Условие (O2) в этом случае гарантирует независимость выбора ветви от $\zeta$.

Обратно, пусть не выполнено (O2), т.е. нашлись $\zeta', \zeta'' \in \mathbb{C}\setminus E$, для которых $|\zeta' - \zeta''| < 2$, но $|\Psi(\zeta') - \Psi(\zeta'')| > \pi$. Если бы (C2) выполнялось, то $\Psi(\zeta') - \Psi(\zeta'')$ совпадало бы с $\Psi_E(\zeta') - \Psi_E(\zeta'')$ так как ветвь логарифма на связном множестве выделяется однозначно с точностью до константы. Поскольку отрезок $[\zeta', \zeta'']$ лежит в $\mathbb{C}\setminus S(1,0;E)$, то на нем $\Psi$ непрерывна и поэтому $|\Psi(\zeta') - \Psi(\zeta'')| < \pi$. Противоречие доказывает лемму.

**Доказательство предложения 5.1.** Не ограничивая общности можно считать $F \subset \mathbb{C}^2$, $b = 0$, $a = (0,1)$, $w = (1,0)$. Сильная линейная выпуклость $F$ гарантирует связность сечения $F$ комплексной прямой $s = \{ z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0 \}$, что позволяет выбрать на $s \setminus F$ однозначную непрерывную ветвь $\varphi$ функции $\ln z_2$. Обозначим $M = \{ z \in \mathbb{C}^2 \setminus F : |z_1| < 1 \}$ и попытаемся продолжить $\varphi$ до однозначной ветви $\Psi$ функции $\ln z_2$ в $M$. В силу линейной выпуклости $F$ множество $M$ содержится в объединении некоторого семейства комплексных прямых, не пересекающих $F$. Для каждой такой прямой $l$ проекция $l \cap M$ на ось $z_1$ есть круг в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, поэтому значение $\varphi$ в центре круга однозначно определяет продолжение ее на $l \cap M$.

Чтобы убедиться в корректности такого построения продолжения функции $\varphi$ нужно доказать, что для каждой фиксированной $z \in M$ продолженное в точку $z$ значение $\Psi(z,l)$ не зависит от выбора прямой $l$, проходящей через $z$. Из $\mathbb{C}$-выпуклости $F$ следует, что множество комплексных прямых, проходящих через $z$ и не пересекающих $F$ связно. Поскольку $\Psi(z,l)$ непрерывно зависит от $l$ и принимает дискретное множество значений, то $\Psi$ не зависит от $l$, т.е. в $M$ корректно определена однозначная непрерывная ветвь функции $\ln z_2$. Обозначим

$$r(\zeta) = 1 - \frac{|\zeta_1|}{\rho_{\alpha^w}(0, \partial F)}.$$

По лемме 5.2 $F$ содержит биконус $\{ z \in \mathbb{C}^2 : |z_2| < r(z_1) \}$. Поэтому

$$|z_2| \geqslant r(\zeta_1) \quad \text{для всех} \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in M.$$

В силу леммы 5.4 нам достаточно доказать, что

(O2.1) для любых $a^1 = (z_1, a_2^1)$, $a^2 = (z_1, a_2^2)$ из $M$ неравенство $|a_2^1 - a_2^2| \leqslant 2r(z)$ влечет $|\Psi(a^1) - \Psi(a^2)| < \pi$.

Предположим противное. Пусть $a^1 = (z_1, a_2^1)$, $a^2 = (z_1, a_2^2)$ из $M$ таковы, что $|a_2^1 - a_2^2| \leqslant 2r(z)$, но $|\Psi(a^1) - \Psi(a^2)| \geqslant \pi$. Поскольку

$$|a_2^i| \geqslant r(z),$$

то

$$|\Psi(a^1) - \Psi(a^2)| > \pi.$$

В силу линейной выпуклости $F$ через $a^1$ и $a^2$ проходят гиперплоскости

$$h^i = \{\,(\zeta_1, A_i\zeta_1 + B_i) : \zeta_1 \in \mathbb{C}\}\,,$$

где $A_i z_1 + B_i = a_2^i$, не заходящие в $F$. Из (1) заключаем, что $\left|a_2^i(\zeta)\right| \geqslant r(\zeta)$, поэтому $\left|\Psi\left(\zeta, a^1(\zeta)\right) - \Psi\left(\zeta, a^2(\zeta)\right)\right| \neq \pi$, а из непрерывности $\Psi$ выполнено

$$\left|\Psi\left(\zeta, a^1(\zeta)\right) - \Psi\left(\zeta, a^2(\zeta)\right)\right| > \pi$$

для всех $\zeta \in U_1(0)$. В частности, для $\zeta = 0$ имеем

$$\left|\Psi\left(0, B_1\right) - \Psi\left(0, B_2\right)\right| > \pi.$$

В этой ситуации лемма 5.4 исключает возможность $|B_1 - B_2| < 1$. Противоречие доказывает предложение.

## §6. Специфические оценки для $\mathbb{C}$-выпуклых множеств. Конечный вариант

Будем говорить, что $F$ пропускает $a$-диск из $b$ в $b + \nu a$, если множество $S(a, b; F)$ содержит $b$ и $b + \nu a$ в одной связной компоненте.

**Предложение 6.1.** *Пусть $\mathbb{C}$-выпуклое множество $F$ содержит точки $c$ и $c + \nu a$ и пропускает $a$-диск из $c$ в $c + \nu a$. Пусть также $R = \min\left(\rho_{\alpha^w}(c, \partial F), \rho_{\alpha^w}(c + \nu a, \partial F)\right)$, $r > 0$ и $z \in \mathbb{C}^2$ таковы, что $\alpha^w(z) = (1 - r)R$. Тогда $F$ пропускает $ra$-диск из $c + z$ в $c + \nu a + z$.*

**Доказательство** не приводится, поскольку оно с очевидными изменениями дословно повторяет доказательство предложения 5.1 с соответствующей заменой леммы 5.4:

**Лемма 6.2.** *Пусть открытое или компактное множество $E$ в $\overline{\mathbb{C}}$ содержит круги радиуса $r$ с центрами в точках $a$ и $b$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(C3) *$E$ пропускает $r$-диск из $a$ в $b$;*

(O3) *существует такая непрерывная ветвь $\Psi_E$ функции*

$$\ln \frac{z-1}{z+1},$$

*что для любых $\zeta', \zeta'' \in \mathbb{C} \setminus E$ неравенство $|\zeta' - \zeta''| < 2r$ влечет*

$$\left|\Psi_E(\zeta') - \Psi_E(\zeta'')\right| < \pi.$$

**Доказательство.** С точностью до линейной замены переменных можно считать, что $a = 1$ и $b = -1$. Будем для краткости называть $r$-окружностями окружности $\{\, z : |z-1| = r\,\}$, $\{\, z : |z+1| = r\,\}$. Определим функцию $\varphi_r$ вне кругов радиуса $r$ с центром в точках $-1$ и $1$ следующим образом: положим $\varphi_r\left(1 + re^{i\tau}\right) = re^{i\tau}$ и продолжим ее так, чтобы на любой окружности, ортогональной $r$-окружностям, она была локально постоянна.

Нетрудно убедиться в том, что функция $\varphi_r$ аналитически определяется формулой

$$\varphi_r(z) = \frac{rl(z) + \sqrt{1 - r^2 + l^2(z)}}{1 + l^2(z)}, \quad \text{где} \quad l(z) = \frac{|z| - 1 + r^2}{2\mathrm{Im}\, z}$$

Из построения легко заключить, что $|z_1 - z_2| \geqslant \varphi_r\,(z_1 - z_2)$, причем равенство достигается лишь на $r$-окружностях, и что

$$\left|\varphi_r(z) - \ln\frac{z-1}{z+1}\right| < \pi. \tag{2}$$

Конформное отображение $w = \frac{z-1}{z+1}$ позволяет применить лемму 3.3 о ветви аргумента и заключить, что условие (C3) эквивалентно существованию вне $S(a, b; E)$ однозначной непрерывной ветви функции $\ln\frac{z-1}{z+1}$, что в силу (2) эквивалентно условию (O3).

## §7. Сильная линейная выпуклость внутренности и ядра последовательности $\mathbb{C}$-выпуклых множеств

Будем говорить, что последовательность множеств $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ *открыто сходится*, если любое открытое множество, содержащееся в бесконечном числе $F_k$, содержится во всех множествах последовательности кроме, возможно, конечного числа. Объединение всех таких открытых множеств назовем *открытым пределом* этой последовательности.

**Теорема 7.1.** *Связная компонента $D$ открытого предела последовательности $\mathbb{C}$-выпуклых множеств $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{CP}^n$ $\mathbb{C}$-выпукла.*

**Доказательство.** *Односвязность* сечений комплексными прямыми. Пусть $\gamma$ — замкнутая кривая в сечении области $D$ комплексной прямой $s$, разделяющая точки $z_+ \in s \setminus D, z_- \in s$, а $K$ — компакт в $D$, содержащий окрестность кривой $\gamma$. Рассекая любой $\mathbb{C}$-выпуклый компакт, содержащий $K$, прямыми, проходящими через одну из точек $z_\pm$, нетрудно заметить, что этот компакт содержит не зависящую от него фиксированную окрестность $U_\pm$ хотя бы одной из точек $z_\pm$. Поэтому начиная с некоторого номера $k = N$ выполняется не только $K \subset F_k$, но и $U_- \subset F_k$ и, следовательно, $z_- \in D$.

*Связность* сечений комплексными прямыми.

От противного. Пусть сечение области $D$ прямой $l$ содержит точки $a$ в одной, а точки $b$ и с в другой связной компоненте, а кривая $\gamma = \{\, f(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\,\}$ соединяет точки $a = f(0)$ и $b = f(1)$ в $D$. Существует такое $t_0$, что точки $f(t_0)$ и $c$ лежат в различных связных компонентах соответствующего сечения комплексной прямой, а точки $f(t)$ и $c$ при любом $t > t_0$ — в одной. Без ограничения общности можно считать $t_0 = 0$ и выбрать неоднородные координаты $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n$ так, чтобы точка $c$ была бесконечно удалённой. Пусть $r > 0$ такое, что область $D$ содержит шары $U_r(a)$ и $U_r(b)$. Выберем $t > t_0$ настолько малым, чтобы $a' = f(t) \in U_{r/3}(a)$ и $b' = a' - a + b \in U_{r/3}(b)$.

Существует кривая $\gamma$, соединяющая точки $a'$ и $b'$ в сечении $D$ комплексной прямой, проходящей через эти точки. Из определения сходимости у каждой точки этой кривой есть окрестность, лежащая почти во всех $F_k$. Из компактности кривой ясно, что у кривой в целом есть окрестность, лежащая во всех $F_k$, начиная с некоторого номера. К этим $F_k$ можно применить предложение 6.1 и получить, что каждое из них пропускает $(\delta(b-a))$-диск из $a$ в $b$, $\delta$ не зависит от $k$.

Из открытого покрытия компакта $l \setminus D$ шарами радиуса $\sigma = (\delta|b-a|)/2$ выберем конечное подпокрытие

$$\bigcup_{m=1}^{N} U_\sigma(z_m) \supset l \setminus D$$

. Применяя предложение 2.5, получаем, что $U_\sigma(z_m) \cap l$ могут лежать в $F_k$ только вместе с полномерной окрестностью, поэтому для любого $m \leqslant N$ существует номер $N_m$, начиная с которого $F_k$ не может содержать $U_\sigma(z_m) \cap l$. Обозначим $NN$ наибольший из этих номеров. Так как $F_{NN}$ пропускает $(\delta(b-a))$-диск из $a$ в $b$, то существует связный компакт в $F_{NN}$, содержащий $a$ и $b$, любая точка $w$ которого лежит в $F_{NN}$ вместе с $(\delta(b-a))$-диском с центром в ней и, следовательно, не может лежать в $l \setminus D$. Это противоречит выбору точек $a$ и $b$.

Если рассмотреть периодическую последовательность $D_1$, $D_2$, $D_1$, $D_2$, ... областей вида $D_1 = D \times \mathbb{C}$ и $D_2 = \mathbb{C} \times D$, где $D \subset \mathbb{C}$ -невыпуклая область, то из $\mathbb{C}$-выпуклости $D_1$ и $D_2$, но не $D_1 \cap D_2 = D \times D$, станет видно, что условия на последовательность в последней теореме невозможно ослабить так, чтобы вместо открытого предела в формулировке фигурировало открытое ядро Каратеодори.

**Следствие 7.2.** *Связная компонента внутренности пересечения вложенной последовательности $\mathbb{C}$-выпуклых множеств $\mathbb{C}$-выпукла.*

**Следствие 7.3** [16, 17]. *Связная компонента внутренности $\mathbb{C}$-выпуклого множества $\mathbb{C}$-выпукла.*

**Теорема 7.4** [18]. *Связная компонента $D$ граничного предела последовательности $\mathbb{C}$-выпуклых множеств $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{CP}^n$ $\mathbb{C}$-выпукла.*

## §8. Проективно выпуклые множества в $\mathbb{CP}^n$

Для построения логически завершенной теории полезно слегка выйти за рамки $\mathbb{C}$-выпуклых множеств и рассмотреть все такие множества в $\mathbb{CP}^n$, сечения которых проективными прямыми ацикличны в размерностях 0 и 1, но могут содержать прямые целиком. Определения и свойства этих множеств близки определению и свойствам проективно выпуклых множеств [19, 20]. Поэтому будем называть их проективно выпуклыми множествами в $\mathbb{CP}^n$.

Открытое либо замкнутое множество $F \subset \mathbb{CP}^n$ *проективно выпукло,* если связны пересечения с произвольной проективной прямой как самого множества, так и его дополнения. Очевидно, дополнение к проективно выпуклому множеству лежит в том же классе. Поскольку этот класс содержит настолько различные множества как $\mathbb{C}$-выпуклые множества и дополнения к ним, определим *ранг* $r(F)$ множества $F$ как максимальную размерность проективной плоскости, лежащей в $F$. Тогда ранг $\mathbb{C}$-выпуклого множества равен нулю, а ранг его дополнения — $n-1$. Будем по определению считать $r(\varnothing)=-1$ и $r(\mathbb{CP}^n)=n$.

Ясно, что $r(F)+r(\mathbb{CP}^n\setminus F)<n$. Рассмотрение введённого класса оправдано двумя обстоятельствами. Во-первых, для множеств этого класса, как будет ниже показано, $r(F)+r(\mathbb{CP}^n\setminus F)=n-1$, и, более того, эти множества окажутся *линейно выпукло-вогнутыми*, то есть через каждую точку множества проходит проективная плоскость размерности, равной рангу этого множества и то же верно для его дополнения. Аналогичное утверждение для вещественного случая получено в [19]. Во-вторых, в этот класс входят множества положительных, отрицательных и нулевых твисторов, играющие очень важную роль в математической физике [21, п.13].

## §9. Односвязность образа проективно выпуклых множеств

**Лемма 9.1.** *Пусть $F\subset\mathbb{CP}^n$ проективно выпукло, а $\varphi$ — дробно-линейная функция на $F$. Тогда $\varphi(F)\subset\mathbb{CP}^1$ также проективно выпукло.*

**Доказательство.** Связность $\varphi(F)$ вытекает из непрерывности $\varphi$ и связности $F$. Для доказательства односвязности предположим, от противного, что $\overline{\mathbb{C}}\setminus\varphi(F)$ несвязно. С точностью до автоморфизмов $\mathbb{CP}^1$ и $\mathbb{CP}^n$ можно считать, что $0$ и $\infty$ лежат в различных связных компонентах $\overline{\mathbb{C}}\setminus\varphi(F)$, а $1=\varphi(a)$, $a\in F$ и $\varphi$ линейно отображает $\mathbb{C}^n\subset\mathbb{CP}^n$ в $\mathbb{C}$, причём $a=0$.

В каждом сечении $F$ проективной прямой, проходящей через $a$, условие $\psi(a)=0$ выделяет однозначную непрерывную ветвь $\psi(z)$ функции $\ln(\varphi(z))$. Тем самым $\psi$ определена на $F$. Покажем, что она непрерывна в произвольной точке $b\in F$. Если $F$ открыто, то сечение

$$\{\, t\in\mathbb{C} : tb\in F\,\} \tag{3}$$

множества $F$ — односвязная область в $\mathbb{C}$ и в этой области есть кривая, соединяющая точки 0 и 1. В силу открытости $F$, при $z$ достаточно близких к $b$ кривая $\Gamma_z = \{\, tz : t \in \Gamma \,\}$ также лежит в $F$ и, следовательно, приращение логарифма по кривой $\varphi(\Gamma_z)$ непрерывно зависит от $z$. Если же $F$ замкнуто, то для любого $b \in F$ существует кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ с концами $0$ и $\infty$, не пересекающая (3), вне которой ветвь логарифма выделяется однозначно. Поскольку $F$ компактно, то при $z$ близких к $b$ эта кривая не пересечёт и

$$\{\, t \in \mathbb{C} : tz \in F \,\},$$

откуда и вытекает непрерывность $\psi$. Поскольку $\varphi^{-1}(w) \cap F$ связно, то при $\varphi(z) = \varphi(z')$ всегда выполняется $\psi(z) = \psi(z')$. Это позволяет выделить непрерывную однозначную ветвь логарифма в $\varphi(F)$, что противоречит предположению о том, что $0$ и $\infty$ лежат в различных связных компонентах.

## §10. Линейная выпукло-вогнутость проективно выпуклых множеств

**Теорема 10.1.** *Пусть $F \subset \mathbb{CP}^n$ проективно выпукло, $n \geqslant 1$. Тогда*

(1) $r(F) + r(\mathbb{CP}^n \setminus F) = n - 1$,
(2) *через каждую точку $z \in F$ проходит целиком лежащая в $F$ плоскость размерности $r(F)$,*
(3) *образ множества $F$ при проективном отображении в $\mathbb{CP}^m$ также проективно выпукл, если он открыт или компактен.*

**Доказательство.** проведем индукцией по $n$.

**1°.** Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Отбрасывая тривиальные случаи $r(F) = 0$ и $r(F) = 2$, приходим к необходимости доказать, что одно из множеств $F$ и $\mathbb{CP}^2 \setminus F$ линейно выпукло. Обозначим $D$ и $K$ соответственно открытое и компактное из этих двух множеств. Если $D$ линейно выпукло, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что существует такая $a \in K$, что каждая комплексная прямая, проходящая через $a$, пересекает $D$. Пора применить следующее утверждение, которое получено Ю. Б. Зелинским в [15] для компактов в $\mathbb{C}^n$, но тривиальной заменой $\mathbb{C}^n$ на $\mathbb{CP}^n$ распространяется на нужный нам случай: *Пусть все пересечения компакта $K \subset \mathbb{CP}^N$ с прямыми, проходящими через фиксированную точку компакта, ацикличны. Тогда $K$ ацикличен.* Пусть, от противного, компакт $K$ не является линейно выпуклым. Тогда существует $b \in D$, для которой пересечение $K$ с любой проективной прямой, проходящей через $b$, непусто. По теореме Вьеториса-Беггля, примененной к естественному отображению

$$K \subset \mathbb{CP}^2 \setminus \{0\} \longmapsto \mathbb{CP}^1,$$

когомологии компакта $K$ изоморфны когомологиям комплексной прямой. Но компакт $K$ ацикличен, а комплексная прямая — нет. Противоречие исчерпывает случай $n = 2$. Условие (3) вытекает из леммы.

**2°** Пусть для $n = k$ теорема верна. Требуется доказать её справедливость в случае $n = k + 1$. Это означает, что для любых $a \in F$ и $b \notin F$ нужно построить плоскости $F \supset l_a \ni a$, $\mathbb{CP}^n \setminus F \supset l_b \ni b$, сумма размерностей которых максимальна, то есть равна $n - 1$. Рассматривая сечения $F$ и $\mathbb{CP}^n \setminus F$ двумерной плоскостью, содержащей $a$ и $b$, из предположения индукции извлекаем, что либо через $a$, либо через $b$ проходит плоскость $l$ размерности $d \geqslant 1$, целиком лежащая либо в $F$, либо в $\mathbb{CP}^n \setminus F$. Пусть, для определённости, $b \in l \subset \mathbb{CP}^n \setminus F$ и $d$ — максимальная из размерностей таких плоскостей. Естественное отображение

$$\pi : \mathbb{CP}^n \setminus \{b\} \longmapsto \mathbb{CP}^{n-1}$$

переводит $F$ в непустое проективно выпуклое множество $\widetilde{F} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$. По предположению индукции $r(\widetilde{F}) + r(\mathbb{CP}^n \setminus \widetilde{F}) = n - 2$. Очевидно, $r(\mathbb{CP}^n \setminus \widetilde{F}) = d - 1$. Тем самым, $r(\widetilde{F}) = n - d - 1$. Пусть $l'$ плоскость этой размерности, лежащая в $r(\widetilde{F})$ и проходящая через точку $\pi(a)$. Множество $\widetilde{l} = \pi^{-1}(l')$ есть $n - d$-мерная гиперплоскость в $\mathbb{CP}^n$, проходящая через точку $b \notin F$. Любая проективная прямая, проходящая через эту точку, задевает $F$, поэтому $r(\widetilde{l \setminus F}) = 0$ и, по предположению индукции, применённому к $\widetilde{l} \cap F$ и $\widetilde{l} \setminus F$, через $a$ проходит $n - 1 - d$-мерная плоскость, целиком лежащая в $F$, что доказывает (2). (3) следует из леммы 9.1, которую в силу предположения индукции можно применить к сужениям заданного отображения на прообразы комплексных прямых.

**Следствие 10.2.** *Пусть $F \subset \mathbb{CP}^n$ проективно выпукло, $n \geqslant 1$; проективные отображения*

$$\varphi : \mathbb{CP}^n \longmapsto \mathbb{CP}^m, \quad \psi : \mathbb{CP}^k \longmapsto \mathbb{CP}^n$$

*таковы, что $\varphi(F)$ и $\psi^{-1}(F)$ либо открыты, либо компактны. Тогда $\varphi(F) \subset \mathbb{CP}^m$ и $\psi^{-1}(F) \subset \mathbb{CP}^k$ проективно выпуклы.*

**Следствие 10.3.** *Если $F \subset \mathbb{CP}^n$ $\mathbb{C}$-выпукло, то оно линейно выпукло по Мартино.*

## §11. Сохранение $\mathbb{C}$-выпуклости

Следующие утверждения непосредственно вытекают из результатов п. 10 поскольку сечения линейно выпуклого множества дробно-линейно изоморфны проективным образам сопряженного множества (см., например, [6]).

**Теорема 11.1.** *Сопряжённое к $\mathbb{C}$-выпуклому множеству $\mathbb{C}$-выпукло.*

**Теорема 11.2.** *Если образ $\mathbb{C}$-выпуклого множества при проективном отображении открыт либо компактен, то он $\mathbb{C}$-выпукл.*

Не известно иных комплексных аналогов выпуклости, которые наследовали бы то свойство выпуклости, что она сохраняется при линейном проектировании (контрпример для линейной выпуклости см. в [6]). Для псевдовыпуклости Н. Щербина рассказывал на семинаре МГУ в 1985 г. результат противоположного характера: любая область в $\mathbb{C}^n$ может быть получена покоординатной проекцией подходящей псевдовыпуклой области из $\mathbb{C}^{n+1}$.

**Теорема 11.3.** *Если прообраз в $\mathbb{CP}^n$, $n > 1$, $\mathbb{C}$-выпуклого множества при непостоянном проективном отображении открыт либо компактен, то он также является $\mathbb{C}$-выпуклым.*

**Доказательство.** Требуется лишь убедиться в том, что в условиях доказываемой теоремы прообраз $\mathbb{C}$-выпуклого множества не может содержать целиком комплексных прямых. Так как $\mathbb{C}$-выпуклое множество не содержит прямых, а образ прямой при проективном отображении есть либо точка, либо прямая, то образом прямой, содержащейся в прообразе множества, могла бы быть только точка. Но прообраз любой точки при вырожденном проективном отображении из $\mathbb{CP}^n$, $n > 1$ есть прямая с выколотой точкой неопределённости отображения.

## §12. Топологическая классификация проективно выпуклых множеств

**Теорема 12.1.** *Любое открытое проективно выпуклое не плотное в $\mathbb{CP}^n$ множество ранга $r$ гомеоморфно области*

$$D^r = \left\{ z = (z_0, \ldots, z_n)_o \,:\, |z_0|^2 + \cdots + |z_r|^2 > |z_{r+1}|^2 + \cdots + |z_n|^2 \right\}. \blacksquare$$

В силу двойственности Александера-Понтрягина группы когомологий проективно выпуклого компакта однозначно определяются группами гомологий его дополнения, следовательно

**Следствие 12.2.** *Любое компактное проективно выпуклое множество в $\mathbb{CP}^n$ ранга $r$ с непустой внутренностью когомологически эквивалентно $r$-мерной плоскости.*

Следующий результат является еще одним, с точки зрения материала этого параграфа, точным аналогом того утверждения, что секущая не может содержать отрезка границы выпуклой области.

**Следствие 12.3.** *Для любого открытого проективно выпуклого множества $D \subset \mathbb{CP}^n$ и для любой прямой $l \subset \mathbb{CP}^n$, пересекающей $D$ и $\mathbb{CP}^n \setminus \overline{D}$ выполняется*

$$\overline{D} \cap l = \overline{D \cap l}.$$

Эквивалентная формулировка этого утверждения:

**Следствие 12.4.** *Пусть точки* $a, b, c$ *лежат на одной комплексной прямой* $l \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n$, *а* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что для любой проективно выпуклой области* $D \subset \mathbb{CP}^n$, *такой что* $b \in D$, $a \notin \overline{D}$, $\rho(b, \partial D) > \varepsilon$, $\rho(a, \partial D) > \varepsilon$, $\rho(c, \partial D \cap l) > \varepsilon$, *выполняется* $\rho(c, \partial D) > \delta$.

Если сечение области $D$ комплексной прямой из $\mathbb{CP}^n$, содержащей $l$, есть $\mathbb{C}$-выпуклая область, то применим предложение 3.2 к точкам $b$ и $c$, в противном случае — к точкам $a$ и $c$ (в качестве множеств $W$ и $V$ возьмем множества $U_1(0)$ и $\{w\}$ соответственно, где $w$ — направляющий вектор прямой $l$).

**Доказательство теоремы 12.1.** Так как ранг $D$ равен $r$ то для доказательства выберем систему однородных координат в $\mathbb{CP}^n$ так, что для любой $z = (z_0, \ldots, z_n)_o$ выполняется $z' = (z_0, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0)_o \in D$ и $z'' = (0, \ldots, 0, z_{r+1}, \ldots, z_n)_o \notin \overline{D}$. Для любой $z \in D$ рассмотрим область $0 \in D_z = \left\{t \in \mathbb{C} : (z' + tz'')_o \in D\right\}$, которая содержит 1 и по условию является односвязной. Существует единственное конформное отображение $f_z$ области $D_z$ на единичный круг с условием $\operatorname{Im} f_z(0) = 0$, $\operatorname{Re} f_z(0) > 0$. Положим $\varphi(z) = (z' + f_z(1)z'')_o$. Если мы докажем, что это отображение взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то тем самым докажем, что $\varphi(z)$ есть гомеоморфизм нашей области $D$ на область $D^r$.

В силу теоремы Римана имеем взаимную однозначность отображения $\varphi$. Покажем, что отображение $\varphi(z)$ взаимно непрерывно. Пусть $\{z^\nu\}$ — последовательность точек области $D$ сходящаяся к точке $z^0 \in D$, а $E$ — ядро последовательности областей $\{D_{z^\nu}\}$. Так как $0 \in D_{z^\nu}$ для любого $\nu$, то существует число $\rho > 0$ такое, что $\{t \in \mathbb{C} : |t| < \rho\} \subset D_{z^\nu}$. Докажем равенство $E = D_{z^0}$. Возьмем точку $t' \in E$, тогда, по определению ядра последовательности областей, существует окрестность $V(t') \subset D_{z^\nu}$ для всех $\nu > \nu_0$ и, следовательно, для всех $t \in V(t')$ справедливо $\left((z^\nu)' + t\,(z^\nu)''\right)_o \in D$. Учитывая, что $z^\nu \to z^0$ при $\nu \to \infty$, имеем $\left(\left(z^0\right)' + t\left(z^0\right)''\right)_o \in \overline{D}$ для всех $t \in V(t')$, т.е. $t' \in \overline{D_{z^0}}$. Покажем, что на самом деле $t' \in D_{z^0}$. От противного: пусть $t' \notin D_{z^0}$, тогда $t' \in \partial D_{z^0}$ и через точку $\left(\left(z^0\right)' + t'\left(z^0\right)''\right)_o$ можно провести гиперплоскость $\left\langle z - \left[\left(z^0\right) + t'\left(z^0\right)''\right], w\right\rangle = 0$, не заходящую в $D$. Тогда $t^\nu = \frac{\left(z^0 - z^\nu\right)' + t'\left(z^0\right)''}{\left(z^\nu\right)''}$ параметризуют точки пересечения этой гиперплоскости с комплексными прямыми, проходящими через 0 и $z^\nu$. А так как $\lim\limits_{\nu\to\infty} t^\nu = t' \notin D_{z^0}$, то $t' \notin E$.

Докажем обратное включение $E \supset D_{z^0}$. Пусть $t' \in D_{z^0}$, тогда существует окрестность $V(t') \subset D_{z^0}$, т.е. для всех $t \in V(t')$ имеет место $\left(\left(z^0\right)' + t\left(z^0\right)''\right)_o \in D$, а так как $z^\nu \to z^0$, то для всех $\nu$ начиная с некоторого $\nu_0$ верно $\left(\left(z^\nu\right)' + t\left(z^\nu\right)''\right)_o \in D$. Таким образом $V(t') \subset D_{z^\nu}$ для всех $\nu > \nu_0$, т.е. $t' \in E$.

$D_{z^0}$ является ядром любой подпоследовательности $\{z^\nu\}$, т.е. области $D_{z^\nu}$ сходятся к ядру $E = D_{z^0}$. По теореме Каратеодори [22, с. 39] функции $f_{z^\nu}$ равномерно сходятся к $f_{z^0}$ внутри $D_{z^0}$, т.е. $\varphi\left(z^\nu\right) = \left(\left(z^\nu\right)' + f_{z^n u}\left(z^\nu\right)''\right)_o$ сходится к $\varphi\left(z^0\right) = \left(\left(z^0\right)' + f_{z^0}\left(z^0\right)''\right)_o$ Получили, что $\varphi$ непрерывна в точке $z^0$. Доказательство непрерывности обратного отображения проводится аналогично с использованием теоремы Каратеодори для обратных отображений.

Приведенные рассуждения не верны для случая $\mathbb{C}$-выпуклой области, сечение которой имеет вид комплексной прямой с выколотой точкой, так как теорема Римана справедлива только для областей, граница которых состоит более чем из одной точки. Однако для проективно выпуклых множеств ранга 0 условие неплотности в теореме 12.1 можно опустить.

**Предложение 12.5 (С. В. Знаменский, М. Пассаре).** *Любое открытое $\mathbb{C}$-выпуклое множество в $\mathbb{CP}^n$ гомеоморфно шару.*

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемое $\mathbb{C}$-выпуклое множество в $\mathbb{CP}^n$ проективно изоморфно подмножеству $\mathbb{C}^n$. Анализируя доказательство теоремы 12.1, нетрудно заметить, что оно проходит для открытого $\mathbb{C}$-выпуклого множества в $\mathbb{C}^n$, не содержащего целиком комплексных прямых (как авторам стало известно от М. Пассаре, этот результат был доказан Л. Хёрмандером вероятно ранее).

Пусть теперь открытое $\mathbb{C}$-выпуклое множество содержит комплексную прямую в $\mathbb{C}^n$. Множество, сопряженное к такому множеству, содержится в некоторой гиперплоскости и, следовательно, дробно-линейно изоморфно некоторому компакту на единицу меньшей размерности. Отсюда область есть произведение области размерности $n-1$ на комплексную прямую. Применяя индукцию по размерности, мы полностью завершаем доказательство.

## Список литературы


[1] Behnke H., Peschl E. Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen // Math. Ann. 1935. V. 111. №2. P. 158–177.

[2] Martineau A. Sur la notion d'ensemble fortement linéellement convexe // Anais. Acad. Brasil. Ciènc. 1968. V. 4. №4. P. 427–435.

[3] Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость // Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск: Инс-т физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1988. С. 39–52.

[4] Знаменский С. В. Томография в пространствах аналитических функционалов // Докл. АН СССР 1990. Т. 312. №5. С. 1037–1040.

[5] Andersson M., Passare M. Complex Kergin interpolation // J. Approxim. Theory 1991. V. 64. №2. P. 214–225.

[6] Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость. I. Двойственность пространств голоморфных функций // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26. №3. С. 32–43.

[7] Знаменский С. В. Геометрический критерий сильной линейной выпуклости // Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. №3. С. 83–84.

[8] Зелинский Ю.Б. О геометрических критериях сильной линейной выпуклости // Докл. АН СССР 1981. Т. 261. №1. С. 11–13.

[9] Andersson M. Cauchy-Fantappiè-Leray formulas with local sections and the inverse Fantappiè transform // Bull. Soc. math. France 1992. V. 120. P. 113–128.

[10] А. П. Южаков, В. П. Кривоколеско Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. матем. журн. 1971. №2. С. 452–458.

[11] Макарова Л.Я. Достаточные условия сильной линейной выпуклости для полиэдров // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск: Ин-т физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1980. С. 89–94.

[12] Айзенберг Л.А., Южаков А.П., Макарова Л.Я. О линейной выпуклости в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. №4. С. 731–746.

[13] Даутов Ш.А., Степаненко В.А. Простой пример ограниченной линейно выпуклой, но невыпуклой области с гладкой границей // Голоморфные функции многих комплексных переменных. Красноярск: Ин-т физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1972. С. 175–179.

[14] Степаненко В.А. Об одном примере ограниченной линейно выпуклой, но невыпуклой области с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. Красноярск: Ин-т физики им. Л.В. Киренского СО АН СССР, 1976. С. 200–202.

[15] Зелинский Ю.Б. О связи свойств множеств со свойствами их сечений и проекций // Успехи мат. наук 1979. Т. 34. №6. С. 158–162.

[16] Зелинский Ю.Б. // Докл. расширенных заседаний семинара ин-та прикл. мат.. Т. 3. №1. Тбилиси, 1988. С. 76–79.

[17] Зелинский Ю. Б. Многозначные отображения в комплексном анализе. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.–мат. наук. Киев, 1988.

[18] Зелинский Ю. Б., Знаменский С. В. Когда пересечение опор аналитического функционала является опорой // Докл. АН СССР 1993. Т. 328. №1. С. 16–18.

[19] Bracho J., Calvillo G. Homotopy classification of projective convex sets // Geom. Dedicata. 1991. V. 37. №3. P. 303–306.

[20] Deumlich R. Über Konvexität in projektiven Räumen // Potsdam. Forsch. 1984. V. 42. P. 47–48.

[21] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. 3-е изд.. М.: Наука, 1985.

[22] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.