



# Российская академия наук Институт Программных Систем

## Исследовательский Центр Системного Анализа

### Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах (термодинамика и экономика)

**Основная тематика ИЦ** связана с исследованием оптимальных процессов и предельных возможностей макросистем с приложениями к необратимой термодинамике и экономике. Макросистемы (МС) – системы, состоящие из большого числа индивидуально неуправляемых элементов (молекул в термодинамике, элементарных экономических агентов в экономике, индивидуумов в процессах миграции и пр.). Управление в таких системах возможно только на макроуровне, изменением воздействий, влияющих на все множество микроэлементов.

#### Основные задачи

1. Количественная мера необратимости в микроэкономике.
2. Процессы минимальной диссипации.
3. Стационарное состояние ОС, включающей посредника.
4. Предельные возможности посредника в замкнутых, открытых и нестационарных МС.
5. Область реализуемых состояний МС.

Одной из характеристик макросистем является количественная мера необратимости процессов, изменение которой характеризует тот объем ресурса, который потребуется привлечь для возврата макросистем в исходное состояние после необратимого процесса. В термодинамике мерой необратимости является энтропия, в экономике -- функция благосостояния. Для любого процесса в макросистеме мера необратимости не убывает, скорость ее роста называют *диссипацией*.

### Процессы минимальной диссипации

#### Термодинамика

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(p, u) X(p, u) dt \rightarrow \min_{u(t)}$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(p, u) dt = \bar{g}$$

$$\dot{N}_1 = -g \Rightarrow \dot{p} = \varphi(p, u),$$

$$p(0) = p_0, \quad \varphi \neq 0 (p \neq u)$$

Для случая  $\varphi = \alpha(p)g(p, u)$  получим:

$$\frac{g^2}{\partial g / \partial u} \frac{\partial X}{\partial u} = \text{const}$$

#### Микроэкономика

$$N_0(\tau) \rightarrow \min_{c(t)}$$

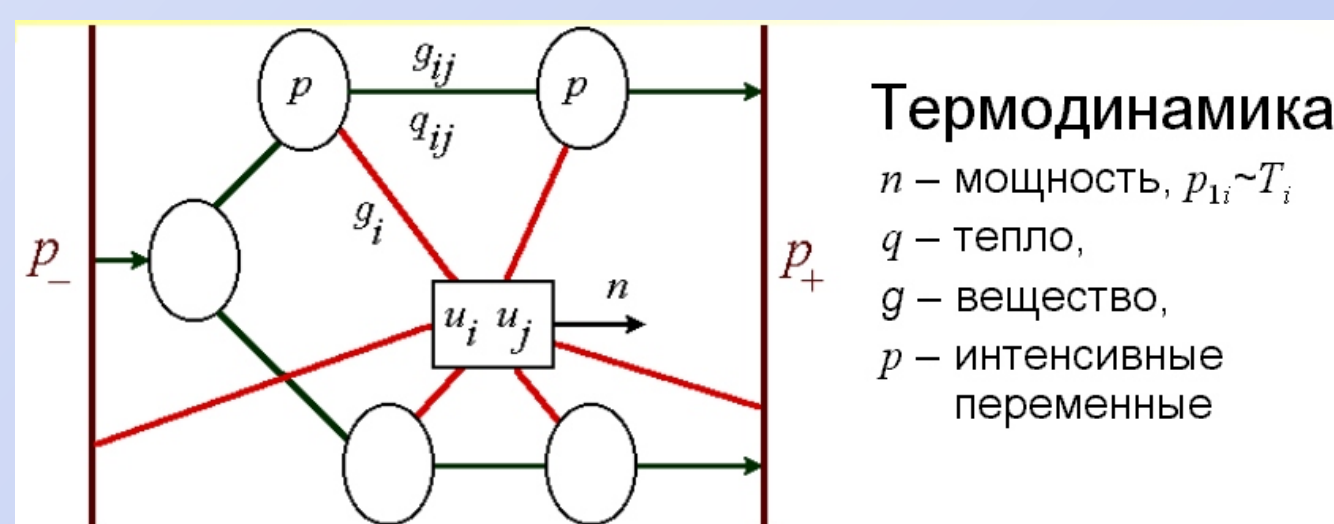
$$\frac{dN_0}{dt} = cg(c, p), \quad N_0(0) = N_0^0,$$

$$\frac{dN}{dt} = -g(c, p), \quad N(0) = N^0,$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(c, p) dt = \bar{g}$$

$$\frac{d}{dN} \left[ \frac{\partial g / \partial c}{g^2} \right] = \frac{(\partial g / \partial p)(\partial p / \partial N_0)}{g^2}$$

### Стационарное состояние ОС, включающей посредника



#### Термодинамика

$n$  – мощность,  $p_i \sim T_i$   
 $q$  – тепло,  
 $g$  – вещество,  
 $p$  – интенсивные переменные

$$n = \sum_i [g_{ij}(p_i, u_i) + g_i(p_i, u_i)] \rightarrow \max_u$$

$$\text{при } \sum_j q_{ij}(p_i, p_j) = q_i, \quad \sum_j g_{ij}(p_i, p_j) = g_i,$$

$$\sum_i g_i = 0,$$

$$\sum_j [g_{ij} s_{ij} + \frac{q_{ij}}{p_{ij}}] = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \sum_i [g_i s_i + \frac{q_i}{u_i}] = 0$$

Если  $g = 0, q_{ij} = \alpha_{ij}(T_i - T_j)$ , то

$$\sum_i \alpha_i \frac{T_i}{u_i} = \sum_i \alpha_i; \quad u_i^2 = \Lambda \frac{T_i}{1 - \lambda_i}$$

$$\alpha_i \left( 1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) = \lambda_i \sum_j \alpha_{ij}, \quad i = 1, \dots, m$$

Если  $m = 2, T_1 = T_+, T_2 = T_-$ , то

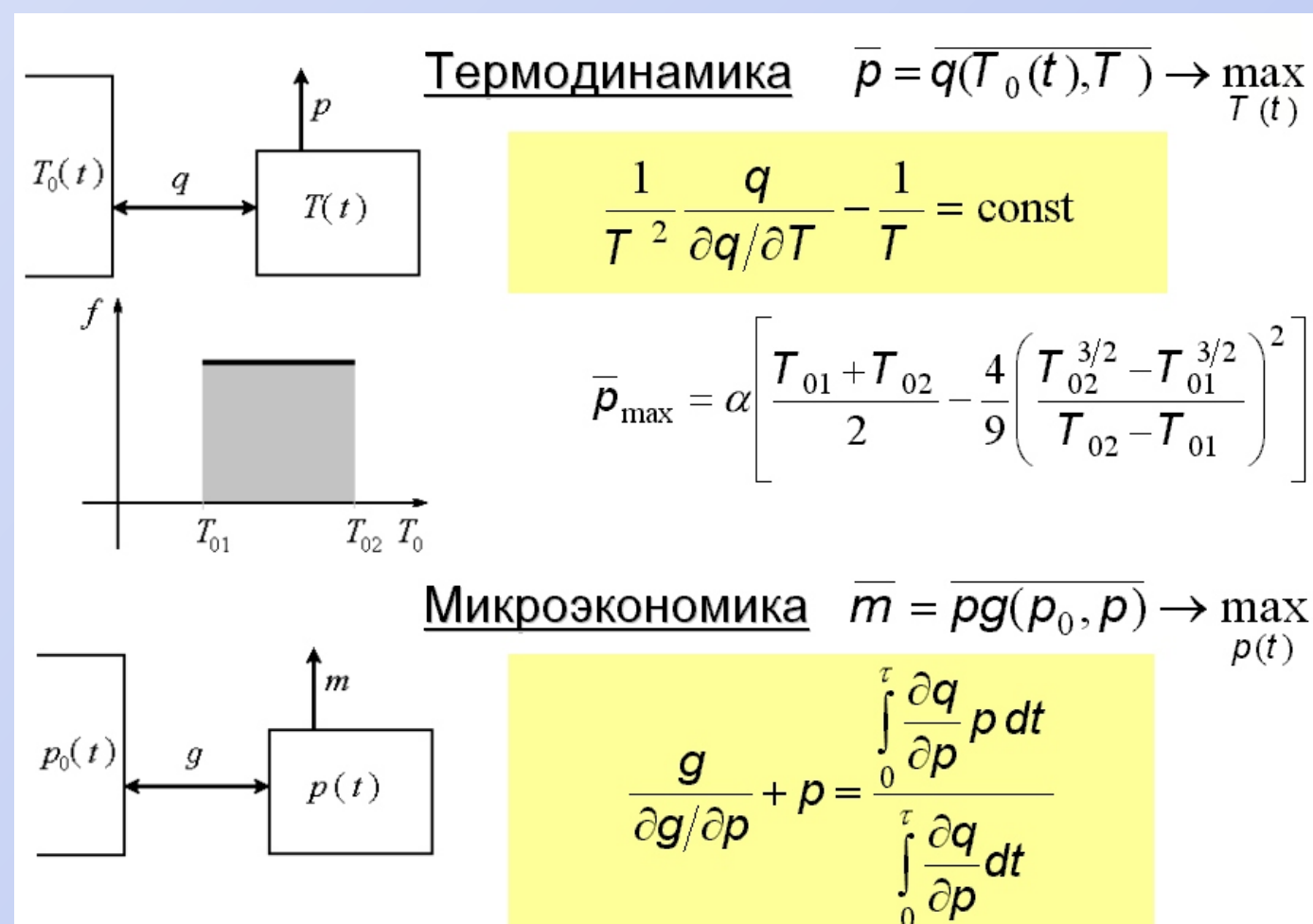
$$u_1^* = k \sqrt{T_+}, \quad u_2^* = k \sqrt{T_-}, \quad \eta = 1 - \sqrt{\frac{T_-}{T_+}}$$

$$N_{\max} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2 \text{ – предельная мощность ТМ}$$

Экстремальный принцип Пригожина при  $g = AX$  ( $A$  – матрица Онзагера) справедлив для любого  $u$ .

### Нестационарные резервуары

Для нестационарного случая извлечение работы в термодинамике и прибыли в микроэкономике возможно при взаимодействии не с несколькими, а только с одной подсистемой.



Термодинамика  $\bar{p} = \bar{q}(T_0(t), T) \rightarrow \max_{T(t)}$

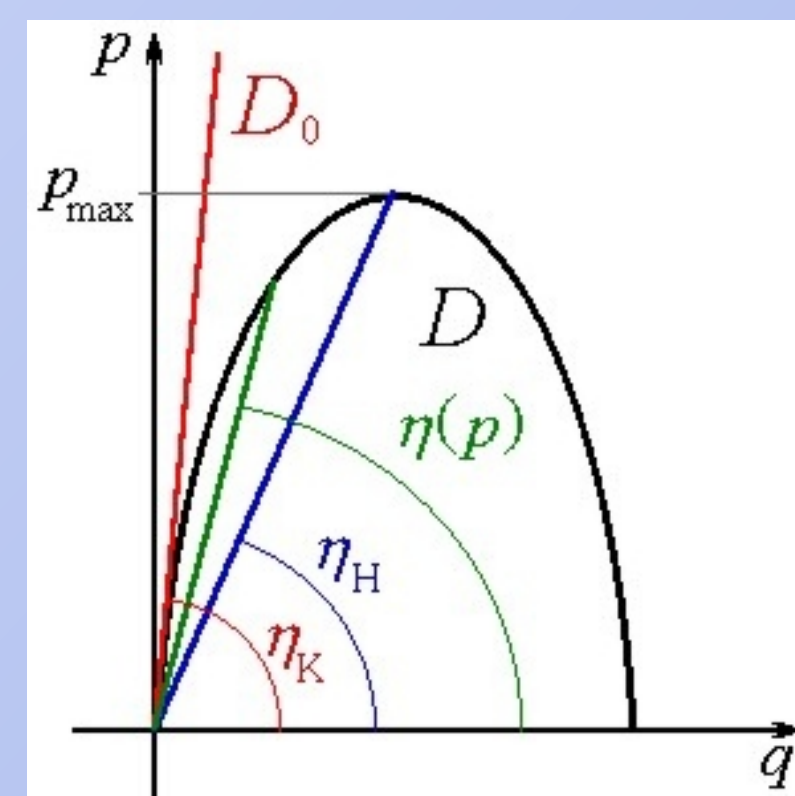
$$\frac{1}{T^2} \frac{q}{\partial q / \partial T} - \frac{1}{T} = \text{const}$$

$$\bar{p}_{\max} = \alpha \left[ \frac{T_{01} + T_{02}}{2} - \frac{4}{9} \left( \frac{T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2}}{T_{02} - T_{01}} \right)^2 \right]$$

Микроэкономика  $\bar{m} = \bar{p}g(p_0, p) \rightarrow \max_{p(t)}$

$$\frac{g}{\partial g / \partial p} + p = \frac{\int_0^{\tau} \frac{\partial q}{\partial p} p dt}{\int_0^{\tau} \frac{\partial q}{\partial p} dt}$$

### Область реализуемости



Кроме прямых ограничений на состояние МС, наложенных в конкретной задаче, для этих систем характерны ограничения, возникающие из-за того, что в замкнутых системах показатель необратимости может только возрастать, а в открытых системах диссипация (энергии, капитала) неотрицательна.

Общая методология построения области реализуемости для замкнутых МС, включающих активные подсистемы, такова:

1. Записывают уравнения балансов, включая в их число балансовое соотношение по фактору необратимости  $S$ .
2. При ограничениях, наложенных на продолжительность процесса, находят минимальное значение  $\sigma = \sigma_{\min}$ , при котором может быть достигнуто то или иное состояние. Этому значению соответствует процесс минимальной диссипации.
3. Уравнения балансов при условии  $\sigma > \sigma_{\min}$  определяют область реализуемости  $D$ .

### Направления исследований ИЦ Системного анализа

- Методы оптимального управления для задач с ограничениями различного типа;
- Усредненные задачи оптимального управления (задачи, включающие усредненные значения переменных или функций переменных);
- Предельные возможности процессов в макросистемах при конечной интенсивности или продолжительности процесса;
- Дифференциальные инварианты и задачи эквивалентности дифференциальных уравнений;
- Задачи описания линейных функционалов на пространстве  $H(D)$  функций, аналитических в области  $C^n$ .



### НАШ АДРЕС

Исследовательский центр  
Системного Анализа  
Институт Программных Систем  
Российской Академии Наук

152020, Россия, Ярославская обл.  
Переславль-Залесский  
Тел./Факс: +7 (08535) 98057  
E-mail: tsirlin@sarc.botik.ru  
Web-site: <http://www.botik.ru/PSI/SARC/>