ISBN 978-5-901795-16-3 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. Переславль-Залесский, 2009

удк 517.977

О. В. Моржин

Нелокальная оптимизация позиционных управлений для дифференциальных систем в границах трубок достижимости и разрешимости

Аннотация. Разработан метод оптимизации позиционных управлений для нелинейных дифференциальных систем в границах трубок достижимости и разрешимости (управляемости). Метод базируется на реализации принципа оптимальности Р. Беллмана на дискретных множествах как аппроксимациях этих трубок. Для аппроксимации траекторных множеств развит метод сечений. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие эффективность предлагаемой методики.

Введение

Для решения задач оптимального позиционного управления (далее: ЗОПзУ) нелинейными дифференциальными системами известны различные методики [1–6]. Специфической чертой подхода Н.Н. Моисеева [4] является возможность декомпозиции ЗОПзУ с аддитивным целевым функционалом на «элементарные задачи» за счет реализации принципа оптимальности Р. Беллмана [1] на априорных «шкалах состояний» в пространстве «время – состояния». Известный метод «блуждающих трубок» [4], призванный дать оценку области, в которой требуется введение «шкал состояний», при данных начальном и/или целевом множествах, обеспечивает, вообще говоря, локальное решение задачи, будучи определенным на некоторых подмножествах трубок достижимости и/или разрешимости (управляемости) [5].

Эффективность подхода определяется суммарной трудоемкостью значительного числа «элементарных операций» по вычислению траекторий системы для перехода из каждого узла на дискретном множестве состояний, введенном для одного узлового момента времени, в каждый узел на аналогичном множестве для последующего узла по

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00945-а.

времени. Иными словами, требуется найти (по возможности глобальное) решение задачи оптимального программного управления (ЗОПрУ) для рассматриваемой динамической системы при терминальных ограничениях, где программными управлениями рассматривают функции или параметры.

Конструктивными направлениями в развитии подхода Н.Н. Моисеева представляются: 1) предварительная аппроксимация траекторных трубок (трубки достижимости при заданном начальном множестве или трубки разрешимости при данном целевом множестве); 2) решение ЗОПрУ на основе современных алгоритмических и программных средств.

1. Формулировка ЗОПрУ и ЗОПзУ

Рассматривается *управляемая система*, описываемая векторным обыкновенным дифференциальным уравнением в форме Коши:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \tag{1}$$

где $T = [t_S, t_F] \ni t$ – заданный отрезок; $x(t) = \big(x_1(t), ..., x_{d(x)}(t)\big) \in E^{d(x)}$ – состояние системы в момент $t \in T$; управление

$$u \in U \subset \mathrm{comp}\big(E^{d(u)}\big), \tag{2}$$

где $\mathrm{comp}\big(E^{d(u)}\big)$ — множество всех компактов евклидова пространства $E^{d(u)}$.

На функцию $f(x, u, t)$ накладываются условия:

1) *условие Липшица* по переменной состояния:

$$\begin{gathered} \exists L^f(D) \in (0, \infty): \ \big\|f(x^1, u, t) - f(x^2, u, t)\big\| \le L^f(D)\,\big\|x^1 - x^2\big\| \\ \forall\ \big(x^j, t\big) \in D\ (j = \overline{1,2}),\ \forall\ u \in U,\ D \subset \mathrm{comp}\left(E^{d(x)} \times T\right); \end{gathered} \tag{3}$$

2) *условие подлинейного роста*:

$$\begin{gathered} \exists\ M^f(D) \in (0, \infty): \\ \|f(x, u, t)\| \le M^f(D)\,(1 + \|x\|)\ \forall\ (x, u, t) \in E^{d(x)} \times U \times T; \end{gathered} \tag{4}$$

3) *непрерывности* по совокупности аргументов (x, u):

$$f_i(x, u, t) \in C\left(E^{d(x)} \times U \times T\right)\ (i = \overline{1, d(x)}); \tag{5}$$

4) *непрерывной дифференцируемости* по (x, u):

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j},\ \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial u_k} \in C\left(E^{d(x)} \times U \times T\right) \\ (i, j = \overline{1, d(x)},\ k = \overline{1, d(u)}). \end{gathered} \tag{6}$$

Функция $u = u(t)$ $(t \in T)$ называется *программным* управлением, функция $u = u(t,x)$ $(t \in T,\ x \in E^{d(x)})$ – *позиционным* управлением.

Классы *доступных* программных и позиционных управлений:

$$\mathcal{U}_{\text{прогр}} = \left\{u \in PC\left(T, E^{d(u)}\right):\ u(t) \in U\ (t \in T)\right\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{U}_{\text{позиц}} = \left\{u \in PC\left(T \times X, E^{d(u)}\right):\ u(t,x) \in U\ (t \in T,\ x \in X)\right\}, \tag{8}$$

где компакт X определяется в контексте конкретной задачи управления.

Декартово произведение $T \times E^{d(x)}$ назовем *пространством позиций*, его точки (t,x) – *позициями*. Пусть задана позиция (t^I, x^I) $(t^I \in [t_S, t_F))$, из которой стартуют траектории системы (1) – (6) при различных доступных программных управлениях, образуя пучок траекторий. Согласно теореме существования и единственности для любой функции $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\text{прогр}}$ существует единственное решение $x[t] = x(t|u,(t^I,x^I))$ $(t \in [t^I, t^{II}],\ t^{II} \le t_F)$ в виде кусочно-дифференцируемой функции. Условие подлинейного роста, как известно, является достаточным условием ограниченности пучка траекторий при $t \in [t^I, t^{II}]$.

Для системы (1) задается начальное условие:

$$x(t^I) = x^I(a),\ a = \left(a_1, ..., a_{d(a)}\right) \in A,$$

где a – вектор *управляющих параметров*,

$$A = \left[a_1^-, a_1^+\right] \times ... \times \left[a_{d(a)}^-, a_{d(a)}^+\right] \subset \operatorname{comp}\left(E^{d(a)}\right)\ (d(a) \le d(x)).$$

Поточечные и концевые фазовые ограничения для системы (1):

$$g_k\left(x(t), \{u(t) \wedge u(t,x)\}, t\right) \le 0\ (t \in T,\ k = \overline{1, d(g)}), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} h_k\left(x(t^{II})\right) = 0\ \left(k = \overline{1, d(he)}\right), \\ h_k\left(x(t^{II})\right) \le 0\ \left(k = \overline{d(he)+1, d(h)}\right). \end{gathered} \tag{10}$$

На некотором отрезке $[t^I, t^{II}] \subseteq T$ рассматривается *целевой критерий*

$$I\left(u(\cdot), a\right) = F\left(x(t^{II})\right) + \int\limits_{t^I}^{t^{II}} f^0(x(t), u(t), t)dt \to \inf\ (\min).$$

На функции $g_k(x,u,t)$ $(k=\overline{1,d(g)})$, $h_k(x)$ $(k=\overline{1,d(h)})$, $f^0(x,u,t)$, $F(x)$ налагаются стандартные условия по аналогии с (3) – (6).

Управления $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\text{прогр}}$, $a\in A$ называются *допустимыми*, если траектория $x(\cdot|u,a,x^I(a))$ удовлетворяет фазовым ограничениям ((9), (10)) во всей области определения $[t^I,t^{II}]$ $(t_S\le t^I<t^{II}\le t_F)$.

Будем говорить, что задача на отрезке $[t^I,t^{II}]$ имеет *решение* в виде *локально-оптимальных* управлений $u^{\text{л}}(\cdot)\in\mathcal{U}_{\text{прогр}}$ и $a^{\text{л}}\in A$, если $\exists\varepsilon>0$ такое, что $\forall v(\cdot)\in\mathcal{U}_{\text{прогр}}$ и $\forall c\in A$ таких, что траектория $x(\cdot|v,c)$ удовлетворяет фазовым ограничениям и условию

$$\|x(t|v,c)-x(t|u^{\text{л}},a^{\text{л}})\|<\varepsilon\ (t\in[t^I,t^{II}]),$$

верно неравенство

$$I\left(v(\cdot),c\right)\ge I\left(u^{\text{л}}(\cdot),a^{\text{л}}\right)=\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U},\ a\in A} I\left(u(\cdot),a\right)>-\infty.$$

Локально-оптимальные управления $u^{\text{л}}(\cdot)\in\mathcal{U}_{\text{прогр}}$ и $a^{\text{л}}\in A$ называются *глобально-оптимальными* и обозначаются $u^{\text{г}}(\cdot)$ и $a^{\text{г}}$, если $\forall v(\cdot)\in\mathcal{U}_{\text{прогр}}$ и $\forall c\in A$ таких, что траектория $x(\cdot|v,c)$ удовлетворяет фазовым ограничениям и не обязана удовлетворять условию близости траекторий $x(\cdot|v,c)$ и $x(\cdot|u^{\text{л}},a^{\text{л}})$, выполнено неравенство $I\left(v(\cdot),c\right)\ge I\left(u^{\text{г}}(\cdot),a^{\text{г}}\right)=\min_j\left\{I\left(u^{\text{л}}_j(\cdot),a^{\text{л}}_j\right)\right\}$, где индекс j пробегает конечное множество локальных минимумов целевого функционала.

Множеством достижимости $\mathcal{R}(t^I,x^I,t^{II})$ системы (1) – (7) из позиции $\{t^I,x^I\}$ $(t_S\le t^I<t^{II}\le t_F)$ называется множество, состоящее из всевозможных состояний системы в момент t^{II} на любых доступных управлениях $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\text{прогр}}$.

Трубкой достижимости, обозначаемой $\mathcal{R}(t^I,x^I,(t^I,t^{II}])$, системы (1) – (7) из позиции $\{t^I,x^I\}$ на полуотрезке $(t^I,t^{II}]$ $(t_S\le t^I<t^{II}\le t_F)$ будем называть объединение $\bigcup\limits_{t\in(t^I,t^{II}]}\mathcal{R}(t^I,x^I,t)$.

Аналогично определяются множества и трубки достижимости из компакта X^{t^I}, лежащего на гиперплоскости, пересекающей пространство позиций при $t=t^I\in[t_S,t_F)$.

На гиперплоскости, пересекающей пространство позиций в момент $t=t_F$, рассматривается компакт $\mathcal{M}$, называемый *целевым множеством*, на который траектории должны переводить систему.

Множеством разрешимости ($\mathcal{M}$-управляемости), обозначаемым $\mathcal{W}(\tau,t_F,\mathcal{M})$, для системы (1) – (7) в момент $\tau\in[t_S,t_F)$ при заданном целевом множестве $\mathcal{M}$ называется множество, состоящее из всевозможных состояний в момент $t = \tau$, из которых система переводима на $\mathcal{M}$ при любых управлениях $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\text{прогр}}$.

Трубкой разрешимости, или трубкой $\mathcal{M}$-управляемости, обозначаемой $\mathcal{W}\left([t^I, t^{II}), t_F, \mathcal{M}\right)$ системы (1) – (7) на полуотрезке $[t^I, t^{II})$ $(t_S \le t^I < t^{II} < t_F)$ при заданном множестве $\mathcal{M}$ назовем объединение $\bigcup\limits_{t \in [t^I, t^{II})} \mathcal{W}(t, t_F, \mathcal{M})$.

Ограничения (9), (10) являются дополнительными критериями качества управления. В таких задачах может оказаться, что никакое доступное управление не является допустимым: не позволяет за выделенное время $t^{II} - t^I$ с требуемой точностью соблюсти эти ограничения.

При фазовых ограничениях речь идет об *условных* множествах достижимости и разрешимости, для аппроксимации которых не достаточно «отсечения» частей соответствующих множеств системы без фазовых ограничений. Будем обозначать одинаково условные и безусловные множества, прибегая при необходимости к уточнению.

Необходимое условие перевода на множество $\mathcal{M}$ траекторий системы, стартующих из X^{t^I}:

$$\mathcal{M} \bigcap \mathcal{R}\big(t^I, X^{t^I}, t_F\big) \ne \varnothing, \ X^{t^I} \bigcap \mathcal{W}\left(t^I, t_F, \mathcal{M}\right) \ne \varnothing.$$

Относительно системы (1)–(7) при условиях (9) и (10), с заданным целевым множеством $\mathcal{M}$, множеством начальных состояний X^{t_S}, имеющем непустое пересечение с $\mathcal{W}(t_S, t_F, \mathcal{M})$, рассматривается ЗОПзУ с целевым критерием

$$I(u, x) = \int\limits_{t_S}^{t_F} z\,(x, u, t)\, dt \to \inf,$$

где на функцию $z(x, u, t)$ налагаются условия типа (3)–(6), управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\text{позиц}}$.

Аналогично формулируется ЗОПзУ в границах трубки достижимости при заданном множестве начальных состояний. Кроме того, может быть рассмотрена ЗОПзУ в границах пересечения трубок достижимости и разрешимости. Для определенности ограничимся задачами, в которых траектории определяются в границах трубок разрешимости.

Решением ЗОПзУ будем называть функцию $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\text{позиц}}$, определяющую управление системой для каждой позиции $\{t, x\}$ из трубки разрешимости.

В плане конструктивной реализации подхода Н.Н. Моисеева необходимо ввести в рассмотрение понятия аппроксимации целевого множества, трубки разрешимости и аппроксимирующего позиционного управления.

2. Схема численной оптимизации позиционного управления и вычислительные эксперименты

Сечение трубки разрешимости – множество разрешимости, является также множеством достижимости системы, получаемой из исходной при ее рассмотрении в «обратном времени» при целевом множестве как множестве начальных состояний. Управляющий параметр a_k $(k \in \overline{1, d(a)})$ при формулировке ЗОПрУ введен для формального задания и идентификации неизвестной k-й координаты вектора начального состояния $x^I(a)$ при аппроксимации таких множеств достижимости, где множество $\mathcal{M}$ играет роль множества начальных состояний. Таким образом, для аппроксимации трубок достижимости и разрешимости необходимо иметь аппарат аппроксимации множеств достижимости.

Пусть $t_S = 0$. На отрезке $[0, t_F]$, рассматриваемом в «прямом времени», вводится равномерная сетка с шагом $\Delta t = t_F/N$: $0 = t^0 < t^1 < ... < t^j < t^{j+1} < ... < t^{N-1} < t^N = t_F \quad (j = \overline{0, N})$. Вводится также сетка, узлы τ^r $(r = \overline{0, N})$ которой следуют по узлам t^j: $t^0 = \tau^N$, ..., $t^{N-r} = \tau^r$, ..., $t^{N-1} = \tau^1$, $t^N = \tau^0$.

Для краткости вместо $\mathcal{W}(t^j, t_F, \mathcal{M})$ будем писать $\mathcal{W}[t^j]$.

Под аппроксимацией (ограниченного) множества разрешимости $\mathcal{W}[t^j]$ системы (1) в момент $t^j \in [0, t_F)$ будем полагать множество $\widehat{\mathcal{W}}[t^j] = \widehat{\mathcal{W}}(t^j, t_F, \mathcal{M}) = \left\{x^i(t^j)\right\}$ $(i = \overline{1, q_{t^j}})$ такое, что

$$\left(\forall^\circ x^i(t^j)\ (i = \overline{1, q_{t^j}})\ x^i(t^j) \cap \mathcal{W}[t^j] \neq \varnothing\right)\ \&\ (\forall^\circ x(t^j) \in \mathcal{W}[t^j]$$

$$\exists i \in \overline{1, q_{t^j}}\ \&\ \exists \varepsilon \downarrow 0\ :\ \|x(t^j) - x^i(t^j)\| \leq \varepsilon\ \&\ x^i(t^j) \in \widehat{\mathcal{W}}[t^j]),$$

где q_{t^j} – количество элементов во множестве $\widehat{\mathcal{W}}[t^j]$.

Аппроксимацией множества $\mathcal{W}([0,t_F),t_F,\mathcal{M}) = \bigcup\limits_{t\in[0,t_F)} \mathcal{W}[t]$ является множество

$$\widehat{\mathcal{W}}([0,t_F),t_F,\mathcal{M}) = \bigcup_{j=1}^{N-1} \widehat{\mathcal{W}}[t^j] = \left\{\{x^i(t^j)\}, i=\overline{1,q_{t^j}},\ j=\overline{1,N-1}\right\}$$

с условием $\Delta t \le \delta \downarrow 0$.

В основу алгоритмов, изложенных в статье [7], положена идея построения контура множества достижимости в некоторый момент t^j по точкам:

1) сначала находятся координаты параллелепипеда, всех граней которого изнутри касается множество достижимости — для этого решается серия ЗОПрУ для поиска экстремальных (по возможности в глобальном смысле) значений каждой фазовой переменной;

2) затем в границах параллелепипеда вводится сетка с разбиением по каждой координате;

3) далее, в результате решения серии ЗОПрУ вычисляются экстремальные (по возможности все локальные) значения некоторой фазовой координаты при фиксированных значениях для всех остальных координат.

В контексте схемы оптимизации позиционного управления узлы, представляющие внутренность множества $\mathcal{W}[t^j]$ могут быть введены условно, так как при работе оптимизационного алгоритма — в случае несвязности множества достижимости — будут удалены такие элементы множества $\widehat{\mathcal{W}}[t^j]$, которые не принадлежат $\mathcal{W}[t^j]$.

Для эффективной реализации схемы необходимо учитывать возможности несвязности, вырождения в многообразие меньшей размерности для множества достижимости. Для аппроксимации, скажем, 3-мерного множества достижимости его 2-мерные сечения не обязательно строить также методом сечений: можно применить для упрощения расчетов, к примеру, метод опорных гиперплоскостей в предположении выпуклости этих плоских сечений. Алгоритмы метода сечений, в т.ч. в комбинации с другими методами, изложены в статьях [7, 8]. Рассмотрим пример аппроксимации контура невыпуклого множества разрешимости.

Пример 1. Рассматривается система, описывающая управление с помощью $p(t)$ плоским маятником в среде с неизвестной вязкостью $q(t)$ (управление второго игрока) на отрезке времени $T=[0,2]\ni t$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = -0.15q(t)x_2(t) - 10.15\sin x_1(t) + p(t).$$

На управления игроков наложены ограничения: $|p(t)| \le 10$, $q(t) \in [0,1]$, $t \in T$. Целевое множество $\mathcal{M} = (0,0)$. Положим функцию $q(t) \equiv 0.5$ $(t \in T)$ и для построения контура множества $\mathcal{W}(0,2,\mathcal{M})$ рассмотрим данную систему в «обратном времени», полагая за начальный момент $t = 0$:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 0.15q(t)x_2(t) + 10.15\sin x_1(t) - p(t),\ \ |p(t)| \le 10.$$

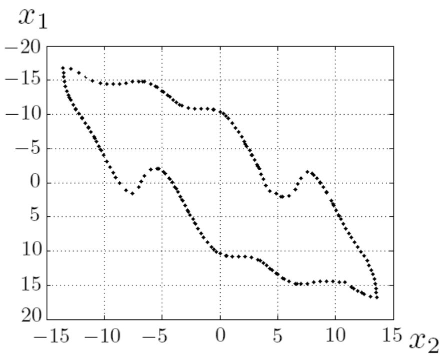

Рис. 1. Аппроксимация границы множества разрешимости в момент $t_S = 0$ (пример 1).

Показанный на рис. 1 результат в целом совпадает, как показал дополнительный расчет, с контуром, получаемым с помощью программы Я. Митчелла [9], которая реализует известный способ оценивания множеств достижимости на основе решения уравнения Беллмана [3]. $\square$

Основным отличием методов сечений и опорных гиперплоскостей от методов эллипсоидов ([10], [11]) и других является получение аппроксимации множества достижимости, исходя непосредственно из определения этого множества.

Для нахождения семейства оптимальных программных управлений, аппроксимирующих оптимальное позиционное управление на частичном временном отрезке $[t^j, t^{j+1}]$ $(j \in \overline{0, N-1})$, проводится решение серии ЗОПрУ с целевым критерием

$$I_j(u) = \int_{t^j}^{t^{j+1}} z(x(t), u(t), t)dt \to \inf\ ,\ I(u) = \sum_{j=0}^{N-1} I_j(u)\,,$$

относительно системы (1) – (7) при поточечных фазовых ограничениях (9) и краевых условиях

$$x(t^j) \in \widehat{\mathcal{W}}[t^j],\ x(t^{j+1}) \in \widehat{\mathcal{W}}[t^{j+1}].$$

На отрезке T вычисление оптимального позиционного управления проводится последовательно, переходя от отрезка $[t^{N-1}, t^N]$ к отрезку $[t^0, t^1]$, на основе принципа оптимальности Р. Беллмана.

Для каждой позиции $\{t^j, x^i(t^j)\}$ ($j \in \overline{0, N-1}$, $i \in \overline{1, q_{t^j}}$) определяется программное управление для движения на текущем частичном временном отрезке $[t^j, t^{j+1}]$. Тем самым проводится аппроксимация позиционного управления программными управлениями: функциями или параметрами. Ключевым отличием от схемы Н.Н. Моисеева является введение в рассмотрение вместо априорных «шкал состояний» аппроксимаций множеств разрешимости системы при заданном целевом множестве. В отличие от метода «блуждающих трубок», описанный метод характеризуется *нелокальностью*: управление рассматривается для всех узлов (позиций) из аппроксимации трубки разрешимости $\mathcal{W}([t_S, t_F), t_F, \mathcal{M})$.

Для простоты изложения ограничимся случаем аппроксимации позиционного управления семействами параметров.

Условие $x(t^{j+1}) \in \widehat{\mathcal{W}}[t^{j+1}]$ записывается посредством терминальных ограничений следующего вида: $x_i(t^j) - \overline{x}_i = 0$, где $\overline{x}$ – заданный числовой вектор, $i \in \overline{1, q_{t^{j+1}}}$, $j \in \overline{0, N-1}$.

В узлах сетки $\widehat{\mathcal{M}}$ функция цены φ позиционного управления $u(t, x)$ имеет только нулевые значения. Рассмотрим функцию

$$y_j\left(t, x^i(t^j), u^m\right) = \int\limits_{t^j}^{t} z(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi,\ t \in [t^j, t^{j+1}].$$

Функция цены управляющего параметра $u^m \in \{u^m\}_{m=0}^{M}$ для позиции $\{t^{N-1}, x^i\}$:

$$\varphi(t^{N-1}, u^m, x^i(t^{N-1}, u^m)) = y_{N-1}(t^N, x^i(t^{N-1}), u^m),\ i \in \overline{1, q_{t^{N-1}}}.$$

Для позиции $\{t^j, x^i(t^j)\}$ ($i \in \overline{1, q_{t^j}}$, $j = \overline{0, N-1}$) функция цены управления u^m определяется как сумма значения $y_j(t^{j+1}, x^i(t^j), u^m)$ и соответствующих значений функции цены на последующих частичных временных отрезках.

Функция Беллмана на множестве $\mathcal{W}[t^j]$ и ее аппроксимация как объединение наименьших значений функции цены по всем элементам множества $\widehat{\mathcal{W}}[t^j]$:

$$\mathcal{B}(t^j, \mathcal{W}[t^j], \{\overline{u}\}) = \min_{\{u\}} \varphi\left(t^j, \mathcal{W}[t^j], \{u\}\right) \approx \mathcal{B}(t^j, \widehat{\mathcal{W}}[t^j], \{\widetilde{u}\}) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{q_{t^j}} \min_{u} \varphi\left(t^j, x^i(t^j), u\right) \ \ (j = \overline{0, N-1}),$$

где $\{\widetilde{u}\}$ – объединение оптимальных программных управлений по всем узлам из $\widehat{\mathcal{W}}[t^j]$. Аналогично,

$$\varphi^{\max}(t^j, \mathcal{W}[t^j], \{\overline{\overline{u}}\}) = \max_{\{u\}} \varphi(t^j, \mathcal{W}[t^j], \{u\}) \approx \varphi^{\max}\left(t^j, \widehat{\mathcal{W}}[t^j], \widetilde{\widetilde{u}}\right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{q_{t^j}} \max_{u} \varphi(t^j, x^i(t^j), u).$$

На каждом отрезке $[t^j, t^{j+1}]$ $(j = \overline{0, N-1})$ известны: а) дискретное множество всех возможных начальных состояний в момент t^j в виде $\widehat{\mathcal{W}}[t^j]$ и дискретное множество всевозможных конечных состояний в момент t^{j+1} в виде $\widehat{\mathcal{W}}[t^{j+1}]$; б) для каждого узла $x^s \in \widehat{\mathcal{W}}[t^{j+1}]$ $(s \in \overline{1, q_{t^{j+1}}})$ минимальное и максимальное значения функции цены.

На отрезке $[t^j, t^{j+1}]$ $(j = \overline{0, N-1})$ проводится выбор управления $\widetilde{u}^i$ для каждого узла $x^i \in \widehat{\mathcal{W}}[t^j]$ $(i \in \overline{1, q_{t^j}})$ из набора $\{u^m\}_{m=0}^{M}$:

$$\widetilde{u}^i = \arg\min_{u^m} \left(y_j(t^{j+1}, x^i(t^j), u^m) + \mathcal{B}(t^{j+1}, x^s(t^{j+1}), \widetilde{u}^s)\right),$$

$$\mathcal{B}(t^j, x^i(t^j), \widetilde{u}^i) = \min_{u^m} \left(y_j(t^{j+1}, x^i(t^j), u^m) + \mathcal{B}(t^{j+1}, x^s(t^{j+1}), \widetilde{u}^s)\right),$$

$$i \in \overline{1, q_{t^j}}, \ \ s \in \overline{1, q_{t^{j+1}}}, \ \ j = \overline{0, N-1}.$$

В случае аппроксимации позиционного управления семействами программных управляющих функций требуется привлечение вычислительных средств для оптимизации программных управлений — вместо простой схемы выбора значений параметра, изложенной выше. Случай аппроксимации параметрами более простой и менее трудоемкий, поэтому с точки зрения сравнительной эффективности можно считать его более приемлемым.

По результатам работы алгоритмов, реализующих изложенную схему, строится «композиционное» программное управление, которое обеспечивает кусочно-дифференцируемую траекторию, по которой производится перевод системы на целевое множество. Если реализуется случай аппроксимации позиционного управления семействами параметров, то может понадобиться «сглаживание» получаемой траектории. С этой целью проводится приближение «композиционного» управления как кусочно–постоянной функции полиномиальной функции достаточно высокой степени. Таким образом, итоговым этапом работы программной системы является применение результатов, насчитанных для всех аппроксимирующих сечений трубки разрешимости, для построения оптимального программного движения из любой позиции, взятой на аппроксимации этой трубки, на целевое множество.

Пример 2. Опишем результаты применения метода к простейшей модельной задаче уклонения движущегося объекта от преследования (летательного аппарата от ракеты) [12].

При исследовании модели ставится вспомогательная ЗОПзУ, которую рассмотрим в безразмерных координатах: найти нелокальное оптимальное управление $u(t,x)$ $((t,x_1,x_2) \in \mathcal{W}(t,t_F,\mathcal{M}),\ t \in [0,t_F))$, доставляющее глобальный минимум целевому функционалу вида (5)

$$I(u,x) = \int_0^{t_F} \left(x_1\sqrt{1-(vu/x_1)^2} - v\sqrt{1-u^2} \right) dt$$

относительно динамической системы

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = -x_1x_2 - \lambda g v u/x_1,\ \dot{x}_2 = -v x_2 u, \\ (x_1(0), x_2(0)) \in \mathcal{W}(0,t_F,\mathcal{M}), \end{gathered} \tag{11}$$

с ограничениями на управление и (введенными условно) фазовыми ограничениями:

$$\begin{gathered} u(t) \in [-0.985,\ 0.985],\ x_1(t) \in [v,\ 0.1], \\ x_2(t) \in [0.09,\ 0.12],\ t \in [0,t_F], \end{gathered} \tag{12}$$

$$\mathcal{M} = \{(x_1(t_F), x_2(t_F)) | x_1(t_F) = v,\ x_2(t_F) \in [0.09,\ 0.12]\}. \tag{13}$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ $(t \in [0,t_F])$ – безразмерные функции скорости ракеты, движущейся на пассивном участке полета, и плотности атмосферы на высоте ее полета; $v = 0.018$ – безразмерная постоянная скорость цели, преследуемой ракетой; $\lambda = 1.079 \cdot 10^{-4}$, $g = 9.81$, $u(t)$ $(t \in [0,t_F])$ – управление целью (синус угла наклона траектории цели в вертикальной плоскости). Функция цены характеризует значения дальности пуска ракеты для текущей позиции.

Эта задача состоит в поиске оптимального позиционного управления преследуемым объектом с целью уклонения от преследователя, используя при этом текущие координаты (высоту полета и плотность атмосферы) преследователя и расстояние между объектами. В задаче считается, что движение преследователя происходит на пассивном участке полета и при этом выполняется принцип преследования, согласно которому приравниваются управления для цели и преследователя, а также предполагается, что преследование начинается на одной высоте полета с целью.

В работах [13], [14] представлены результаты аппроксимации оптимального позиционного управления цели по описанной выше схеме с использованием приближения на каждом частичном временном отрезке позиционного управления семейством управляющих параметров.

На рис. 2, 3 показаны аппроксимирующие сечения для трубки достижимости системы, получаемой при рассмотрении системы (11) в «обратном времени» (при условиях (12)), где $\mathcal{M}$ из (13) играет роль множества начальных состояний (моменты $\tau^r = 0.5r$, $r = \overline{1,44}$). Рис. 4 представляет семейство оптимальных управляющих параметров, аппроксимирующих оптимальное позиционное управление на отрезке $[t^{N-2}, t^{N-1}]$, определенное на сетке узлов $x^i \in \widehat{\mathcal{W}}[t^{N-2}]$ $(i \in \overline{1, q_{t^{N-2}}})$.

В отличие от случая, соответствующего изображенному на рис. 4 графику, для большинства множеств $\widehat{\mathcal{W}}[t^j]$ в трубке разрешимости получаются разрывные по состоянию функции управления. Так как для каждого узла существует программное управление, то соответствующая траектория для перевода системы на следующее множество разрешимости (вплоть до множества $\mathcal{M}$) получается в виде непрерывной кусочно-дифференцируемой функции, ограниченной трубкой разрешимости. □

Вычислительные эксперименты проводились в системе MS Visual Studio 2005 с интегрированной системой Intel Visual Fortran 9. Важным преимуществом новой системы программирования является автоматическое распараллеливание потоков. Вообще говоря, реализация описываемых вычислительных схем довольно трудоемка, поэтому конструктивным является проведение расчетов на многопроцессорных системах. Распараллеливание алгоритмов не представляет труда, причем может быть осуществлено как на кластерах, так и на суперкомпьютерах различной архитектуры. Простота реализации

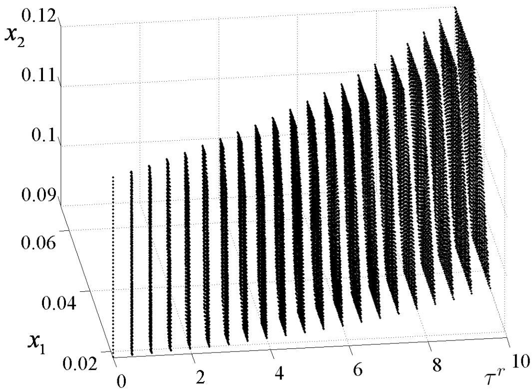

Рис. 2. Аппроксимирующие сечения трубки достижимости

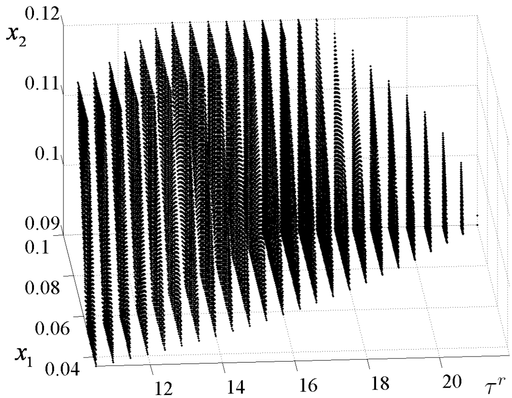

Рис. 3. Аппроксимирующие сечения трубки достижимости

обусловлена отсутствием зависимости между, например, вычислениями по аппроксимации множеств достижимости для различных моментов τ^r.

3. Вопросы численного решения ЗОПрУ

Как указано выше, «элементарной операцией» в алгоритмах аппроксимации множеств разрешимости и оптимизации позиционного

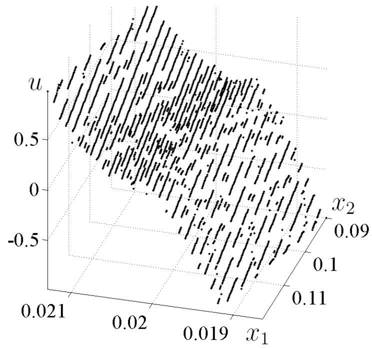

Рис. 4. Множество оптимальных значений параметров

управления является ЗОПрУ, которая может оказаться достаточно трудноразрешимой. Эффективность решения серии ЗОПрУ зависит от уровня надежности (включая уровень автоматизации) программного обеспечения.

Автором проведена реализация на языке Fortran ряда методов улучшения программных управлений [15–18].

На языке Maple разработана программа автоматического вывода конструкций принципа максимума Понтрягина и его линеаризованной версии. Для учета концевых и поточечных фазовых ограничений реализованы методы гладких и недифференцируемых по Фреше штрафных функционалов. Наряду с методами, работающими в функциональных пространствах, эффективно применяются методы, базирующиеся на сведении ЗОПрУ к задачам конечномерной оптимизации большой размерности за счет дискретизации по управлению ([18, 19]). Последний подход реализован, например, в пакете «TOMP» Д. Крафтом [20], причем, на наш взгляд, весьма успешно.

Заключение

Метод решения ЗОПзУ и алгоритм аппроксимации множеств разрешимости не используют дифференциальное уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, опираются непосредственно на определение множеств разрешимости и принцип оптимальности Р. Беллмана, реализуемый на аппроксимации трубки разрешимости. В подходе «элементарной операцией» является ЗОПрУ, следовательно, эффективность его зависит от эффективности методов и многометодных схем решения ЗОПрУ. Иными словами, аппарат аппроксимации траекторных трубок и решения ЗОПрУ, ЗОПзУ является единым с точки зрения достаточно полного исследования возможностей управления в нелинейных дифференциальных системах.

Список литературы

[1] Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современные проблемы управления. — Пер. с англ. — М.: Наука, 1968. ↑(document)

[2] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. ↑

[3] Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Физматлит, 1997. ↑2

[4] Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971. ↑(document)

[5] Куржанский А.Б. *Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений. I* // Дифференц. уравнения. — **41**, № 1, 2005, с. 12–22. ↑(document)

[6] Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. — Boston: Birkhauser, 1988. ↑(document)

[7] Моржин О.В., Тятюшкин А.И. *Алгоритм метода сечений и программные средства для построения множеств достижимости* // Известия РАН. Теория и системы управления, № 1, 2008, с. 5–11. ↑2

[8] Тятюшкин А.И., Моржин О.В. *Алгоритм численного синтеза оптимального управления* // Автоматика и телемеханика. — **69**, № 4, 2008, с. 109–118. ↑2

[9] Mitchell I. A Toolbox of Level Set Methods. — `http://www.cs.ubc.ca/~mitchell/ToolboxLS/`, дата обращения: 16.02.2009. ↑2

[10] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. ↑2

[11] Kurzhanskiy A.A. Ellipsoidal Toolbox. — `http://code.google.com/p/ellipsoids/`, дата обращения: 16.02.2009. ↑2

[12] Тятюшкин А.И., Федунов Б.Е. *Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром* // Известия РАН. Теория и системы управления, № 1, 2006, с. 125-132. ↑2

[13] Моржин О.В., Тятюшкин А.И. *Оптимизация позиционного управления в одной задаче уклонения от преследователя* // Материалы IV междунар. симпозиума «Обобщенные решения в задачах управления» (23 – 28 июня 2008). – Улан-Удэ, 2008, с. 77-85, ISBN 978-5-9793-0067-2. ↑2

[14] Тятюшкин А.И., Моржин О.В. *Конструктивные методы оптимизации управлений в нелинейных системах* // Автоматика и телемеханика. — **70**, 2009, принята к изданию. ↑2

[15] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. ↑3

[16] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Наука, 2000. ↑

[17] Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятского государственного ун-та, 2008. ↑

[18] Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1992. ↑3

[19] Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982. ↑3

[20] Kraft D. *Algorithm 733: TOMP – Fortran modules for optimal control calculations* // ACM Transactions on Mathematical Software. — **20**, № 3, 1994, pp. 262–281. ↑3

Институт программных систем РАН, Исследовательский центр процессов управления; Бурятский государственный университет, Институт математики и информатики

O. V. Morzhin. *Nonlocal optimization of positional controls for differential systems in borders of the reachable and solvability tubes* // Proceedings of Program Systems institute scientific conference “Program systems: Theory and applications”. — Pereslavl-Zalesskij, v. **1**, 2009. — p. 43–58. — ISBN 978-5-901795-16-3 (*in Russian*).

Abstract. It’s developed a method for optimization of positional controls for nonlinear differential systems in borders of the reachable and solvability (controllability) tubes. The method is based on realization of the Bellman’s optimality principle on discrete sets as approximations of these tubes. The section method is worked out for approximation of the trajectory sets. The numerical experiments were carried out and allow to illustrate the efficiency of the suggested technique.